EDISI REVISI 2018

Matematika

SMA/MA/
SMK/MAK

KELAS
XII

Disklaimer: Buku ini merupakan buku siswa yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku siswa ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis dan laman http://buku.kemdikbud.go.id atau melalui email buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

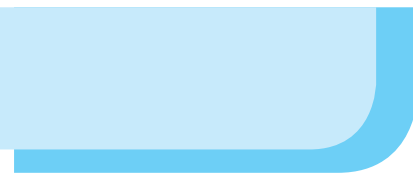
Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika/ Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- . Edisi Revisi Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018.
viii, 256 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII
ISBN 978-602-427-114-5 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-427-117-6 (jilid 3)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Penulis : Abdur Rahman As'ari, Tjang Daniel Chandra, Ipung Yuwono, Lathiful Anwar, Syaiful Hamzah Nasution, Dahliatul Hasanah, Makbul Muksar, Vita Kusuma Sari, Nur Atikah.
Penelaah : Agung Lukito, Turmudi, Yansen Marpaung, Suwarsono, Sugito Adi Warsito, Ali Mahmudi.
Pe-*review* : Kartoyoso
Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Cetakan Ke-1, 2014 (ISBN 978-602-282-775-7)
Cetakan Ke-2, 2018 (edisi revisi)
Disusun dengan huruf Times New Roman, 12 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian di atas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antarvariabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antarbeberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Matematika Kelas XII untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada siswa seperti uraian di atas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan siswa dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, serta berlatih berpikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan yaitu dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan siswa untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, siswa diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap siswa dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Sebagai edisi pertama, buku ini sangat terbuka terhadap masukan dan akan terus diperbaiki dan disempurnakan. Untuk itu, kami mengundang para pembaca untuk memberikan kritik, saran, dan masukan guna perbaikan dan penyempurnaan edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar iii

Daftar Isi vi

BAB 1 Dimensi Tiga 1
- A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar 1
- B. Diagram Alur Konsep 3
- C. Materi Pembelajaran 4
  - Subbab 1.1 Jarak Antar titik 5
  - Subbab 1.2 Jarak Titik ke Garis 13
  - Subbab 1.3 Jarak Titik ke Bidang 18
- Uji Kompetensi 25

BAB 2 Statistika 27
- A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar 27
- B. Diagram Alur Konsep 29
- C. Materi Pembelajaran 30
  - Subbab 2.1 Penyajian Data 32
    - Kegiatan 2.1.1 Distribusi Frekuensi 32
    - Kegiatan 2.1.2 Histogram, Poligon Frekuensi, dan Ogive . . . 41
  - Subbab 2.2 Ukuran Pemusatan dan Penyebaran Data Berkelompok 57
    - Kegiatan 2.2.1 Ukuran Pemusatan Data Berkelompok 58
    - Kegiatan 2.2.2 Ukuran Penyebaran Data Berkelompok 68
- Uji Kompetensi 79

BAB 3 Peluang 83
- A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar 83
- B. Diagram Alur Konsep 85

C. Materi Pembelajaran 86

Subbab 3.1 Aturan Pencacahan, Permutasi, dan Kombinasi 86

Kegiatan 3.1.1 Aturan Penjumlahan dan Perkalian 86

Kegiatan 3.1.2 Penyusunan dan Pengambilan 93

Kegiatan 3.1.3 Menentukan Rumus Permutasi dan Penerapanya 98

Kegiatan 3.1.4 Menentukan Rumus Kombinasi dan Penerapannya 107

Kegiatan 3.1.5 Menentukan Rumus Permutasi dengan Beberapa Unsur Sama dan Penerapannya . . . 113

Kegiatan 3.1.6 Menentukan Rumus Permutasi Siklis dan Penerapannya 118

Subbab 3.2 Kejadian Majemuk, Peluang Saling Lepas, Peluang Saling Bebas, dan Peluang Bersyarat 128

Kegiatan 3.2.1 Kejadian Majemuk 128

Kegiatan 3.2.2 Peluang Saling Lepas 133

Kegiatan 3.2.3 Peluang Saling Bebas 139

Kegiatan 3.2.4 Peluang Bersyarat 144

Uji Kompetensi 150

BAB 4 Kekongruenan dan Kesebangunan (Pengayaan) 153

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar 153

B. Diagram Alur Konsep 155

C. Materi Pembelajaran 156

Subbab 4.1 Kekongruenan 156

Kegiatan 4.1.1: Menentukan Pasangan-Pasangan Sisi dan Sudut yang Bersesuaian atau Berkorespondensi dari Dua Segibanyak 157

Kegiatan 4.1.2: Kekongruenan Dua Segibanyak 161

Kegiatan 4.1.3: Menentukan Kekongruenan Dua Segitiga . . . 164

Kegiatan 4.1.4: Alur Berpikir dalam Pembuktian Deduktif . . 175

Kegiatan 4.1.5: Menentukan Kekongruenan Bangun Datar dengan Bangun Datar Hasil Transformasi (Rotasi, Pergeseran, Dilatasi/Perbesaran, Pencerminan) 182

Subbab 4.2 Kesebangunan 192

Kegiatan 4.2.1: Mengidentifikasi Kesebangunan Dua Bangun Datar 196

Kegiatan 4.2.2: Mengidentifikasi Segitiga-Segitiga yang Sebangun 199

Kegiatan 4.2.3: Menentukan Kesebangunan Bangun Fatar dengan Bangun Datar Hasil Transformasi (Rotasi, Pergeseran, Dilatasi/Perbesaran, Pencerminan) 216

Kegiatan 4.2.4: Menentukan Ukuran Unsur-Unsur Segitiga yang Bersesuaian dari Dua Segitiga yang Sebangun 223

Uji Kompetensi 231

Glosarium 233

Daftar Pustaka 238

Profil Penulis 239

Profil Penelaah 248

Profil Editor 254

Dimensi Tiga

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
3.1 Mendeskripsikan jarak dalam ruang (antartitik, titik ke garis, dan titik ke bidang). 4.1 Menentukan jarak dalam ruang (antartitik, titik ke garis,dan titik ke bidang).	Melalui pembelajaran dimensi tiga, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengamati dan mendeskripsikan masalah jarak antartitik, titik ke garis, dan titik ke bidang pada ruang. 2. Mengamati dan menerapkan konsep jarak antartitik, titik ke garis, dan titik ke bidang untuk menyelesaikan masalah pada dimensi tiga. 3. Mengonstruksi rumus jarak dua titik dan jarak titik ke garis.

Istilah Penting

- *Titik*
- *Garis*
- *Jarak*
- *Ruang*
- *Diagonal*
- *Bidang*

Biografi Euclid

Sumber: The Britannica Guide to Geometry

Euclid merupakan seorang matematikawan yang hidup sekitar tahun 300 SM di Alexandria dan sering disebut sebagai "Bapak Geometri". Dialah yang mengungkapkan bahwa:

1. titik adalah 0 dimensi,
2. garis adalah 1 dimensi yaitu garis itu sendiri,
3. persegi dan bangun datar lainnya adalah 2 dimensi yaitu panjang dan lebar,
4. bangun ruang adalah 3 dimensi yaitu panjang lebar tinggi,
5. tidak ada bangun geometri 4 dimensi.

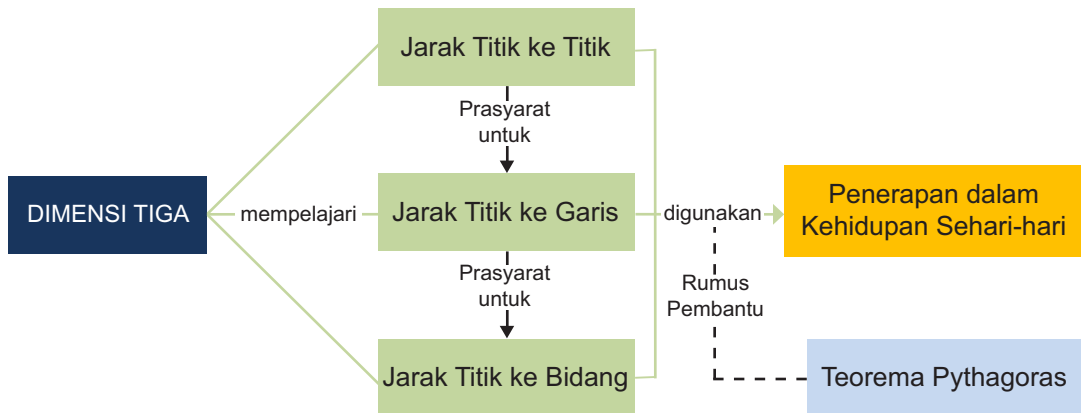
Dalam bukunya "The Elements", ia menyatakan 5 *postulat* yang menjadi landasan dari semua teorema yang ditemukannya.

Postulat dan teorema yang beliau ungkapkan merupakan landasan teori tentang kedudukan titik, garis, dan bidang dalam ruang yang hingga kini masih digunakan dengan hampir tanpa perubahan yang prinsip. Euclid menulis 13 jilid buku tentang geometri. Dalam buku-bukunya ia menyatakan *aksioma* (pernyataan pernyataan sederhana) dan membangun dalil tentang geometri berdasarkan aksioma-aksioma tersebut. Contoh dari aksioma Euclid adalah, "*Ada satu dan hanya satu garis lurus, di mana garis lurus tersebut melewati dua titik*". Buku-buku karangannya menjadi hasil karya penting dan menjadi acuan dalam pembelajaran Ilmu Geometri. Bagi Euclid, matematika itu penting sebagai bahan studi dan bukan sekedar alat untuk mencari nafkah. Ketika ia memberi kuliah geometri pada seorang raja, Raja tersebut bertanya, "Tidak adakah cara yang lebih mudah bagi saya untuk mengerti dalam mempelajari geometri?". Euclid menjawab, "Bagi Raja tak ada jalan yang mudah untuk mengerti geometri. Setiap orang harus berpikir ke depan tentang dirinya apabila ia sedang belajar".

Sumber: Hosch, W.L. 2011. The Britannica Guide to Geometry. New York: Britannica Educational Publishing

Beberapa hikmah yang mungkin bisa kita petik, adalah:

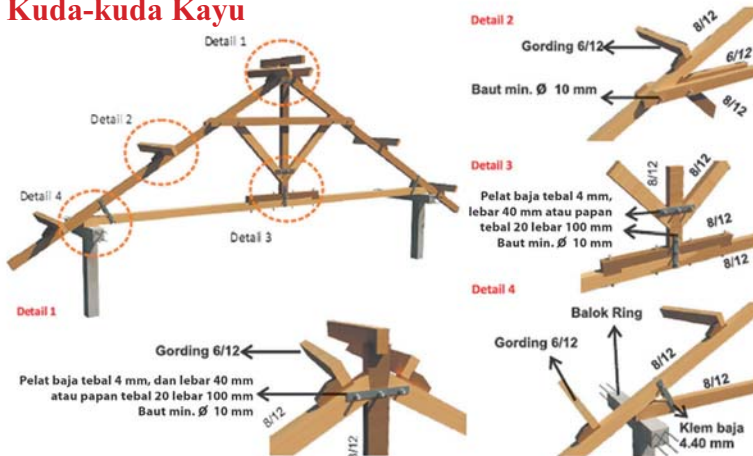
1. Ilmu bukanlah sekedar alat untuk mencari nafkah dalam memenuhi kebutuhan hidup, tetapi untuk mencari nafkah seseorang harus mempunyai ilmu.
2. Jalan pintas bukanlah suatu hal yang baik untuk seseorang yang memang benar-benar ingin belajar.

B. Diagram Alur Konsep

C. Materi Pembelajaran

Memanfaatkan Atap Rumah Sebagai Ruangan

Gambar 1.1: Ruangan Atap
Sumber: https://septanabp.wordpress.com/tag/attic/

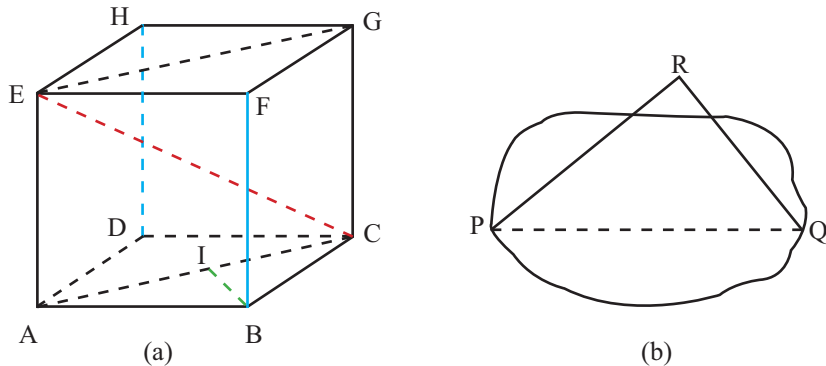
Saat ini banyak orang yang memanfaatkan atap rumah sebagai ruang berkumpul atau ruang tidur. Pemanfaatan atap sebagai ruangan dilakukan mengingat keterbatasan lahan yang dimiliki oleh pemilik rumah. Untuk menghemat biaya pembuatan rumah, salah satu aspek yang harus diperhatikan adalah biaya pembuatan kuda-kuda rumah. Penentuan Rincian Anggaran (RAB) pembuatan kuda-kuda dapat ditentukan dengan matematika. Untuk mendapatkan rincian biaya tersebut, salah satu konsep yang dapat digunakan adalah dimensi tiga. Konsep yang dimaksud jarak titik dengan titik atau titik dengan garis.

Perhatikan Gambar 1.2 tentang kuda-kuda rumah. Dari gambar tersebut dapat ditentukan biaya pembuatan kuda-kuda. Biaya ini tergantung dari panjang keseluruhan kayu, jenis kayu dan dimensi kayu (panjang, lebar, dan tinggi).

Gambar 1.2: Kuda-kuda suatu rumah
Sumber: http://www.megatrussglobal.com/2014/04/analisis-perbandingan-harga-konstruksi.html

Perhatikan bentuk-bentuk bangun ruang yang sering Anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya kamar tidur yang berbentuk balok, kotak makanan yang berbentuk kubus, kaleng susu yang berbentuk tabung dan lain sebagainya. Pernahkah Anda berpikir bahwa dalam bangun-bangun tersebut terdapat beberapa istilah yang akan dibahas pada bab ini yaitu jarak antartitik, jarak titik ke garis, dan jarak titik ke bidang. Agar Anda memahami istilah tersebut, lakukan beberapa kegiatan berikut ini.

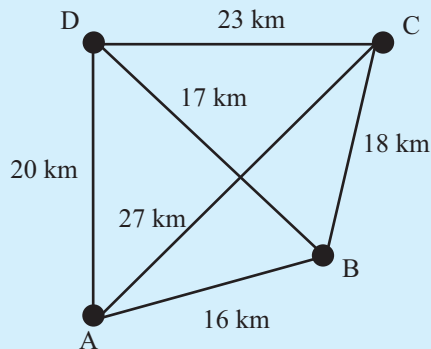
Gambar 1.3: Beberapa wadah berbentuk balok.

Subbab 1.1 Jarak Antar titik

Perhatikan bangun ruang berikut ini.

Bangun 1.1

Bangun 1.1.a merupakan kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk = 3 cm. EC, EG, dan AC, masing-masing merupakan jarak antara titik E dengan C, titik E dengan G, serta titik A dengan titik C. Pada Bangun 1.1.b jarak antara titik P dan Q adalah panjang ruas garis PQ. Untuk memahami konsep jarak dua titik perhatikan aktivitas berikut.

Masalah 1.1

Bangun 1.2 berikut merepresentasikan kota-kota yang terhubung dengan jalan. Titik merepresentasikan kota dan ruas garis merepresentasikan jalan yang menghubungkan kota.

Bangun 1.2 Gambar Kota dan jalan yang menghubungkannya

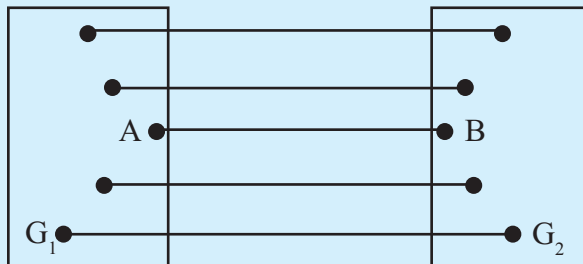
Nasyitha berencana menuju kota C berangkat dari kota A. Tentukan rute perjalanan yang mungkin ditempuh oleh Nasyitha. Tulis kemungkinan rute yang ditempuh Nasyitha pada Tabel 1.1. Kemudian tentukan panjang rute-rute tersebut. Rute manakah yang terpendek? Menurut pendapat Anda berapa jarak antara kota A dan C? Beri alasan untuk jawaban Anda.

Tabel 1.1: Kemungkinan Rute yang ditempuh Nasyitha

No	Kemungkinan Rute dari kota A ke kota C	Panjang Lintasan
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

Dari masalah di atas, jarak antara Kota A dan C adalah 27 km.

Masalah 1.2

Perhatikan masalah berikut ini.

Gambar 1.4 Jarak Dua Titik

Jika G1 dan G2 adalah bangun-bangun geometri. Maka G1 dan G2 dapat dipikirkan sebagai himpunan titik-titik. Dari G1 dan G2 dapat dilakukan pemasangan satu-satu antara titik-titik pada G1 dan G2. Jika AB adalah yang terpendek antara semua ruas garis penghubung titik-titik itu, maka panjang ruas garis AB disebut jarak antara bangun G1 dan G2.

Dari kegiatan mengamati di atas, tulislah istilah penting dari hasil pengamatan Anda.

Dari kegiatan mengamati di atas, apakah terdapat hal-hal yang ingin Anda tanyakan? Salah satu contoh pertanyaan yang mungkin Anda tanyakan adalah ”Apa pengertian jarak antara dua titik?”

Tuliskan pertanyaan-pertanyaan tersebut ke tempat berikut ini.

Untuk lebih memahami jarak antar titik, isilah tabel berikut ini. Anda dapat menggunakan informasi dari sumber lain untuk menyelesaikan pertanyaan pada Tabel 1.2.

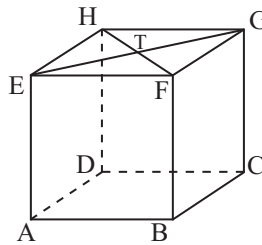
Tabel 1.2 Jarak antar titik dalam bangun ruang

No.	Bangun Ruang	Pertanyaan	Jawaban
1.		a. Manakah yang merupakan jarak antara titik F dan G? b. Manakah yang merupakan jarak antara titik B dan D?	
2.		a. Manakah yang merupakan jarak antara titik P dan N? b. Manakah yang merupakan jarak antara titik Q dan L?	
3.		a. Manakah yang merupakan jarak antara titik E dan F? b. Manakah yang merupakan jarak antara titik B dan D?	
4.		a. Manakah yang merupakan jarak antara titik T dan D? b. Manakah yang merupakan jarak antara titik B dan D?	

Masalah 1.3

Dalam suatu kamar berukuran 4m × 4m × 4m dipasang lampu tepat di-tengah-tengah atap. Kamar tersebut digambarkan sebagai kubus ABCD. EFGH. Berapa jarak lampu ke salah satu sudut lantai kamar?

Alternatif Penyelesaian

Misal kamar tersebut digambarkan sebagai kubus ABCD.EFGH dan lampu dinyatakan dengan titik T seperti berikut.

Bangun 1.3 Kubus ABCD.EFGH sebagai representasi kamar

Jarak lampu ke salah satu sudut lantai kamar adalah jarak titik T ke titik A atau titik B atau titik C atau titik D. Titik T merupakan titik tengah bidang EFGH, sehingga TA = TB = TC = TD. Akan dicari jarak titik T ke titik A. Jarak titik T ke titik A salah satunya dapat dicari dari segitiga AET. Karena $\overline{AE}$ tegak lurus dengan $\overline{ET}$, maka segitiga AET merupakan segitiga siku-siku yang siku-siku di E. Dengan menggunakan Teorema Pythagoras diperoleh $AT^2 = AE^2 + ET^2$.

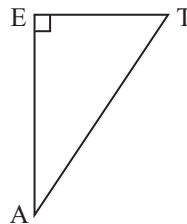
Menentukan panjang $\overline{ET}$.

Oleh karena T merupakan titik tengah, maka ET = $\frac{1}{2}$EG. Karena EG merupakan diagonal bidang, panjang ET = $\frac{1}{2}.4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

$$AT^2 = AE^2 + ET^2$$

$$AT = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{24}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

Jadi jarak lampu ke salah satu sudut lantai adalah $2\sqrt{6}$ m.

Mengonstruksi Rumus Jarak Antar Titik

Radar (dalam bahasa inggris merupakan singkatan dari *Radio Detection and Ranging*) adalah suatu sistem gelombang elektromagnetik yang berguna untuk mendeteksi, mengukur jarak dan membuat peta benda-benda seperti pesawat terbang, kapal laut, berbagai kendaraan bermotor dan informasi cuaca. Radar dapat mendeteksi posisi suatu benda melalaui layar seperti berikut.

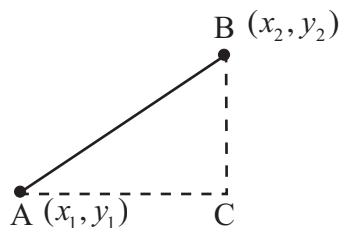
Gambar 1.5: Tampilan Layar Radar
Sumber: http://www.dreamstime.com/royalty-free-stock-image-radar-screen-image28624986

Titik dalam radar tersebut merepresentasikan objek yang dideteksi radar. Titik pusat radar adalah lokasi sinyal radar dipancarkan. Untuk menentukan jarak suatu benda, ternyata dapat digunakan rumus matematika. Bagaimana cara menentukan jarak tersebut?
Misalnya pusat radar dinotasikan sebagai titik A (x_1, y_1) dan objek yang terdeteksi dinotasikan sebagai titik B (x_2, y_2).

B (x_2, y_2)

A (x_1, y_1)

Gambar 1.6: Dua titik A dan B

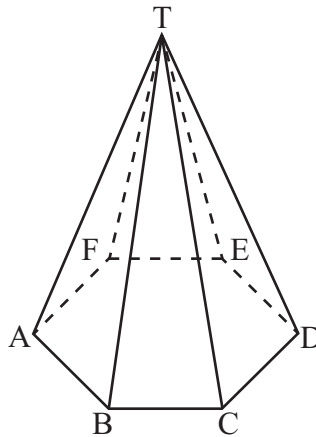
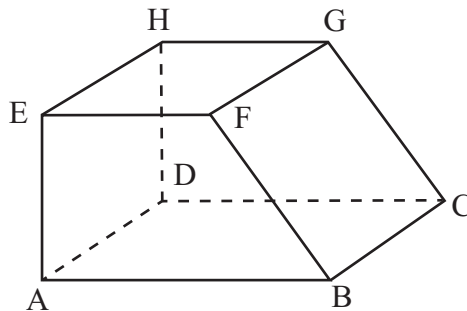
Bagaimana menentukan rumus umum untuk menentukan jarak kedua titik tersebut?
Perhatikan Gambar 1.7, Dua titik dihubungkan dengan ruas garis, kemudian dibuat segitiga siku-siku seperti berikut.

Gambar 1.7: Segitiga siku-siku ACB.

Tentukan panjang BC dan AC. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, hitunglah panjang $\overline{AB}$.

Dari kegiatan yang telah Anda lakukan di atas, buatlah simpulan tentang jarak antara dua titik dan bagaimana menentukannya. Tukarkan simpulan tersebut dengan teman sebangku/kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat. Tulis simpulan pada tempat berikut.

Soal Latihan 1.1

Jawablah soal berikut disertai dengan langkah pengerjaannya!

1. Diketahui limas beraturan T.ABC dengan bidang alas berbentuk segitiga sama sisi. TA tegak lurus dengan bidang alas. Jika panjang AB = $4\sqrt{2}$ cm dan TA = 4 cm, tentukan jarak antara titik T dan C!
2. Perhatikan limas segi enam beraturan berikut.

   Diketahui panjang AB = 10 cm dan TA = 13 cm. Titik O merupakan titik tengah garis BE. Tentukan jarak antara titik T dan O!
3. Perhatikan bangun berikut ini.

   Jika diketahui panjang AB = 5 cm, AE = BC = EF = 4 cm, maka tentukan:
   a. Jarak antara titik A dan C
   b. Jarak antara titik E dan C
   c. Jarak antara titik A dan G

Subbab 1.2 Jarak Titik ke Garis

Amati dengan cermat informasi pada tabel berikut. Tabel 1.3 menyajikan informasi tentang jarak titik ke garis pada ruang dimensi tiga.

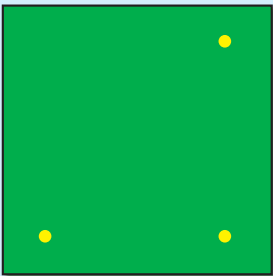
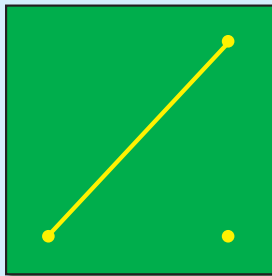
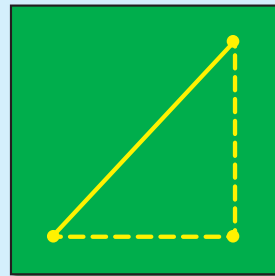
Tabel 1.3 Jarak titik ke garis pada bangun ruang.

No.	Bangun Ruang	Keterangan
1.	Kubus ABCD.EFGH (label: H, G, E, F, D, C, A, B)	Dari gambar di samping, panjang ruas garis EA adalah jarak antara titik E dengan ruas garis AB. Panjang ruas garis BC merupakan jarak antara titik C dengan ruas garis AB.
2.	Balok KLMN.OPQR (label: R, Q, O, P, N, M, K, L)	Dari gambar di samping, panjang ruas garis OR merupakan jarak antara titik R dengan ruas garis OP.
3.	Balok ABCD.EFGH (label: H, G, E, F, D, C, A, B)	Dari gambar di samping, panjang ruas garis DC merupakan jarak antara titik D dengan ruas garis BC. Panjang ruas garis AE merupakan jarak antara titik A dengan ruas garis EF.

Dari kegiatan mengamati di atas, tulislah istilah penting dari hasil pengamatan Anda.

Dari kegiatan mengamati di atas, apakah terdapat hal-hal yang ingin Anda tanyakan? Tuliskan pertanyaan-pertanyaan tersebut ke tempat berikut ini.

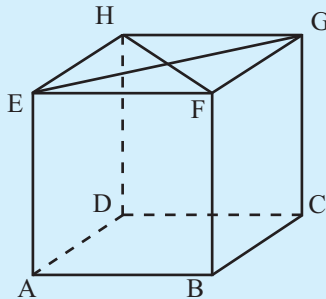
Masalah 1.4

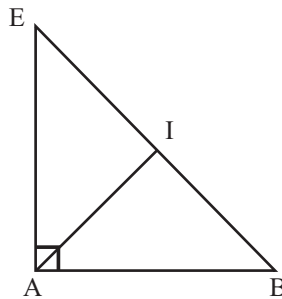
Tiga paku ditancapkan pada papan sehingga menjadi titik sudut segitiga siku-siku (lihat Gambar 1.8.a). Seutas tali diikatkan pada dua paku yang ditancapkan (lihat Gambar 1.8.b). Misal paku-paku tersebut digambarkan sebagai titik A, B, dan C seperti Gambar 1.8.c dengan AC = 6 cm, BC = 8 cm, dan AB = 10 cm.

Gambar 1.8: a

Gambar 1.8: b

Gambar 1.8: c

Gambar 1.8: Ilustrasi paku yang ditancapkan di papan

Melalui eksperimen kecil, tentukan panjang tali minimal yang menghubungkan paku C (titik C) dengan tali yang terpasang pada paku A dan paku B (ruas garis $\overline{AB}$). Apa syarat yang harus dipenuhi agar mendapatkan panjang tali minimal? Beri alasan untuk jawaban Anda.

Masalah 1.5

Diberikan kubus ABCD.EFGH sebagai berikut. Jika panjang rusuk kubus adalah 2 cm, berapakah jarak titik A ke diagonal bidang $\overline{EB}$?

Alternatif Penyelesaian

Jika titik E dan B dihubungkan dengan ruas garis, maka diperoleh,

Jarak titik A ke $\overline{EB}$ adalah panjang ruas garis $\overline{AI}$ dengan BI = $\frac{1}{2}$BE, mengapa?

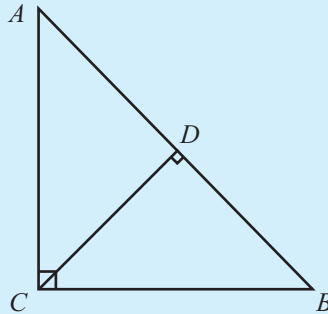
Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh $AI = \sqrt{AB^2 - BI^2}$.

$EB = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,sehingga $BI = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}.2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}$

Jadi jarak titik A ke diagonal bidang $\overline{EB}$ adalah $\sqrt{2}$ cm.

Masalah 1.6

Diberikan segitiga siku-siku ABC seperti berikut. Misal AB = c, BC = a, AC = b dan CD = d. Garis CD merupakan garis tinggi. Bagaimana menentukan d, apabila a, b, dan c diketahui?

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan segitiga siku-siku ABC.

Luas $\Delta\ ABC = \frac{1}{2}BCAC = \frac{1}{2}ab$. Selain itu Luas $\Delta\ ABC = \frac{1}{2}AB.CD = \frac{1}{2}cd$.

Sehingga diperoleh Luas ΔABC = Luas ΔABC

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}cd$$

$$ab = cd$$

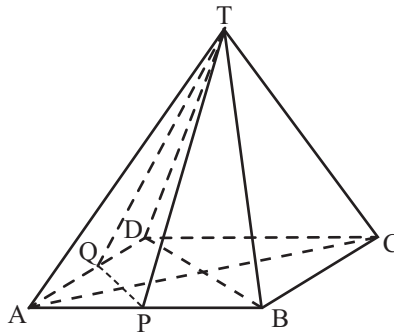
$$d = \frac{ab}{c}$$

Dari kegiatan yang telah Anda lakukan di atas, buatlah simpulan tentang jarak titik ke garis dan bagaimana menentukannya. Tukarkan simpulan tersebut dengan teman sebangku/kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat. Tulis simpulan pada tempat berikut.

Soal Latihan 1.2

Jawablah soal berikut disertai dengan langkah pengerjaannya!

1. Diketahui limas beraturan T.ABCD, panjang rusuk AB = 3 cm dan TA = 6 cm. Tentukan jarak titik B dan rusuk TD.
2. Diketahui limas segi enam beraturan T.ABCDEF dengan panjang rusuk AB = 10 cm dan AT =13 cm.

   Tentukan jarak antara titik B dan rusuk TE.
3. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang AB = 10 cm. Tentukan:
   a. jarak titik F ke garis AC
   b. jarak titik H ke garis DF
4. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 8 cm. Titik M adalah titik tengah BC. Tentukan jarak M ke EG.
5. Perhatikan limas segi empat beraturan berikut.

   Titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk AB dan AD. Jika panjang AB = TA = 12 cm, tentukan jarak antara titik T dan garis PQ!

Subbab 1.3 Jarak Titik ke Bidang

Untuk lebih memahami tentang jarak titik ke bidang amatilah tabel berikut.

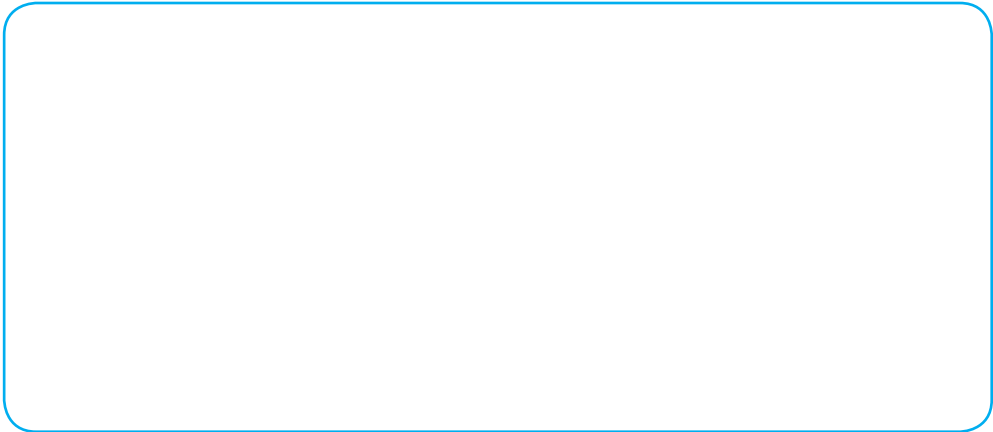
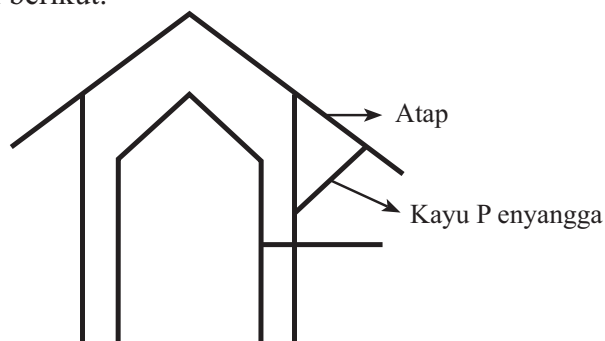
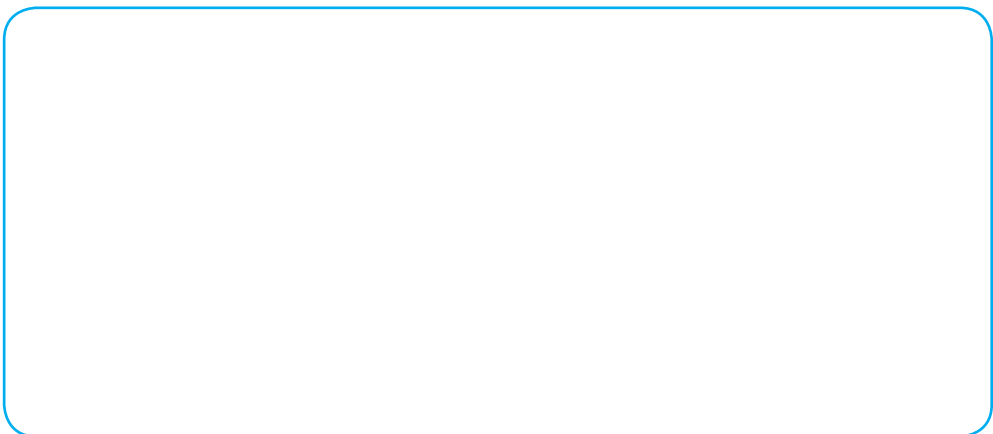
Tabel 1.4 Jarak titik ke bidang

No.	Bangun Ruang	Keterangan
1.	H G E F D C A B	Panjang ruas garis BC merupakan jarak antara titik B dengan bidang DCGH. Panjang ruas garis CD merupakan jarak antara titik C dengan bidang ADHE.
2.	R Q O P N M K L	Panjang ruas garis KN merupakan jarak antara titik K dengan bidang MNRQ. Panjang ruas garis OP merupakan jarak antara titik O dengan bidang LMQP.
3.	H G E D F C A B	Panjang ruas garis HE merupakan jarak antara titik H dengan bidang ABFE. Panjang ruas garis CG merupakan jarak antara titik C dengan bidang EFGH.

Masalah 1.7

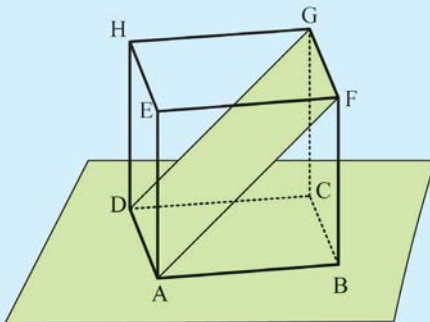
Tiang penyangga dibuat untuk menyangga atap suatu gedung. Tiang penyangga ini menghubungkan suatu titik pada salah satu sisi gedung dan suatu titik pada bidang atap seperti ditunjukkan pada Gambar 1.9 berikut.

Gambar 1.9: Tiang Penyangga Atap Bangunan

Sumber: *http://www.ideaonline.co.id/iDEA2013/Eksterior/Fasad/Batu-Alam-Mencerahkan-Tampilan-Fasad/Tiang-Penyangga-Atap*

Pada Gambar 1.9 Apabila dibuat gambar tampak samping diperoleh gambar seperti berikut.

Gambar 1.10: Tampak Samping Tiang Penyangga Atap Bangunan

Dari Gambar 1.10, cermati gambar kayu penyangga dan atap. Dapatkah Anda menentukan kondisi atau syarat agar panjang kayu penyangga seminimal mungkin?
Dari kegiatan mengamati di atas, tulislah istilah penting dari hasil pengamatan Anda.

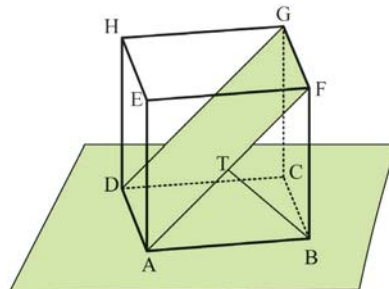
Ayo Menanya

Dari kegiatan mengamati di atas, apakah terdapat hal-hal yang ingin Anda tanyakan? Tuliskan pertanyaan-pertanyaan tersebut ke tempat berikut ini.

Masalah 1.8

Gambar 1.11: Bidang AFGD pada Kubus ABCD.EFGH

Diberikan kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 4 cm. Titik A, F, G, dan D dihubungkan sehingga terbentuk bidang AFGD seperti gambar di samping. Berapakah jarak titik B ke bidang AFGD?

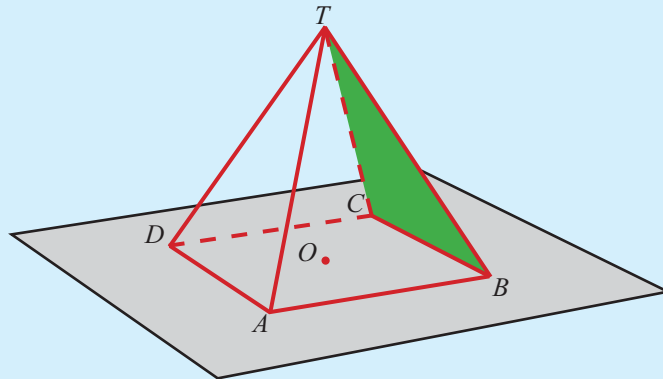
Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan jarak titik B ke bidang AFGD dapat ditentukan dengan mencari panjang ruas garis yang tegak lurus dengan bidang AFGD dan melalui titik B.

$\overline{BT}$ tegak lurus dengan bidang AFGD, sehingga jarak titik B ke bidang AFGD adalah panjang ruas garis $\overline{BT}$. Titik T adalah titik tengah diagonal bidang $\overline{AF}$ (mengapa?). Panjang $\overline{AF}$ adalah $4\sqrt{2}$ cm, sehingga panjang $\overline{AT}$ adalah $2\sqrt{2}$ cm. Karena $\overline{BT}$ tegak lurus bidang AFGD, maka segitiga ATB adalah segitiga siku-siku. Sehingga: $TB = \sqrt{AB^2 - AT^2} = \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$

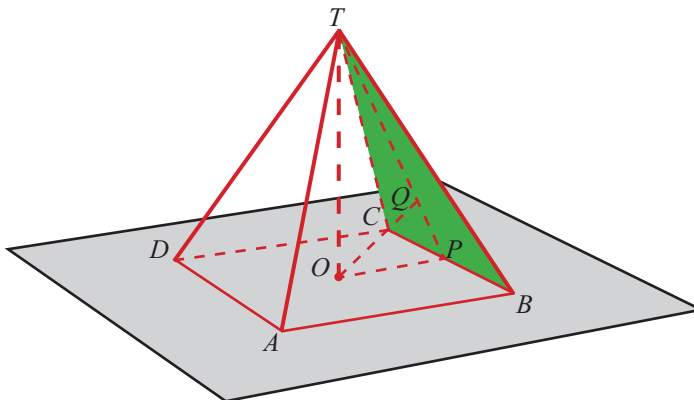
Jadi jarak titik B ke bidang AFGD adalah $2\sqrt{2}$ cm.

Masalah 1.9

Masalah 1.9 serupa dengan Masalah 1.8. Pada Masalah 1.9 siswa diberi limas T.ABCD dengan alas persegi dan siswa diminta untuk menentukan jarak titik O ke bidang TBC.

Diberikan limas T.ABCD dengan alas persegi. Titik O adalah perpotongan diagonal AC dan BD. Jika AB = BC = CD = AD = 6 cm, TA = TB = TC = TD = $3\sqrt{6}$ cm dan tinggi limas 6 cm, berapakah jarak antara titik O dengan bidang TBC?

Gambar 1.12: Limas T.ABCD

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan Gambar 1.13 berikut ini.

Gambar 1.13: Jarak titik O ke bidang TBC.

Untuk menentukan jarak titik O ke bidang TBC, dibuat ruas garis $\overline{OP}$ dengan $\overline{OP}$ sejajar $\overline{AB}$, OP = $\frac{1}{2}$AB = 3 cm dan TO = 6 cm. Misal titik Q terletak pada bidang TBC, titik Q terletak pada $\overline{TP}$ dengan $\overline{TP}$ terletak pada bidang TBC dan $\overline{OQ}$ tegak lurus $\overline{TP}$. Jarak titik O ke bidang TBC adalah panjang ruas garis $\overline{TP}$ dengan OQ = $\frac{OP \times TO}{TP}$ (darimana?)

Oleh karena TP = $\sqrt{TO^2 + OP^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, maka:

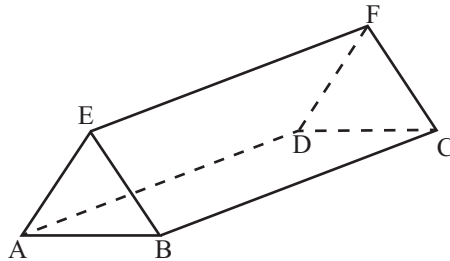
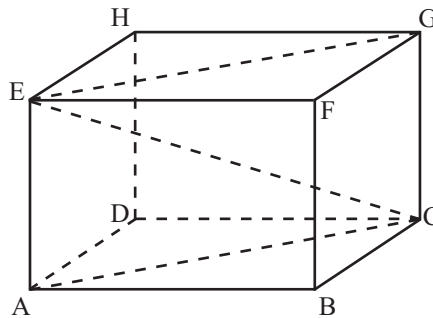
$$OQ = \frac{OP \times TO}{TP} = \frac{3 \times 6}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

Jadi, jarak titik O ke bidang TBC adalah $\frac{6}{5}\sqrt{5}$ cm.

Dari kegiatan yang telah Anda lakukan di atas, buatlah simpulan tentang jarak titik ke bidang dan bagaimana menentukannya. Tukarkan simpulan tersebut dengan teman sebangku/kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat. Tulis simpulan pada tempat berikut.

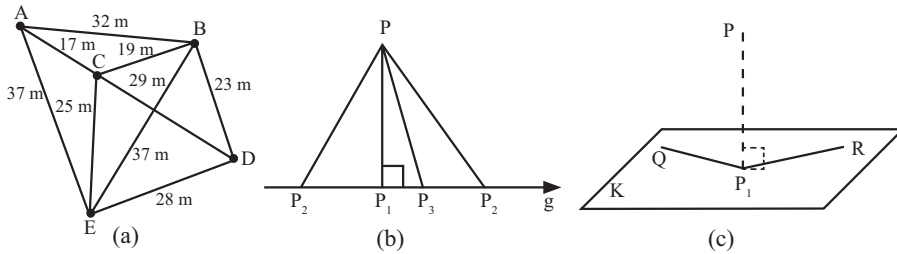
Soal Latihan 1.3

Jawablah soal berikut disertai dengan langkah pengerjaannya!

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH yang panjang rusuknya a cm. Titik Q adalah titik tengah rusuk BF. Tentukan jarak titik H ke bidang ACQ.
2. Suatu kepanitiaan membuat papan nama dari kertas yang membentuk bangun seperti berikut.

   Ternyata ABE membentuk segitiga sama sisi, panjang BF = 13 cm dan BC = 12 cm. Tentukan jarak antara titik A dan bidang BCFE!
3. Dari gambar di bawah, jika diketahui panjang AB = 8 cm, BC = 6 cm dan EC = $5\sqrt{5}$ cm, tentukan jarak antara titik B dan bidang ACE.

4. Diketahui limas segitiga beraturan T.ABC . Panjang AB = 6 cm dan TA = 8 cm. Tentukan jarak antara titik T dengan bidang ABC.
5. Diketahui luas permukaan kubus ABCD.EFGH adalah 294 cm^2. Tentukan:
   a. Jarak antara titik F ke bidang ADHE.
   b. Jarak antara titik B ke bidang ACH.

Uji Kompetensi

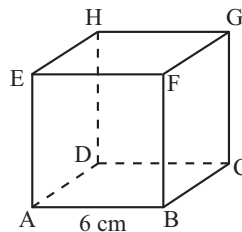
Jawablah pertanyaan berikut disertai dengan langkah pengerjaannya!

1. Perhatikan gambar berikut.

   a. Dari Gambar (a), tentukan jarak dari titik A ke D.
   b. Dari Gambar (b), tentukan jarak titik P terhadap garis *g*.
   c. Dari Gambar (c), tentukan jarak titik P pada bidang-K.

2. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 9 cm. Buat ilustrasi kubus tersebut. Tentukan langkah menentukan jarak titik F ke bidang BEG. Kemudian hitunglah jarak titik F ke bidang BEG.

3. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a. Jika titik P terletak pada perpanjangan AB sehingga PB = 2a, dan titik Q pada perpanjangan FG sehingga QG = a.
   a. Buatlah ilustrasi dari masalah di atas.
   b. Tentukan PQ.

4. Panjang setiap bidang empat beraturan T.ABC sama dengan 16 cm. Jika P pertengahan AT dan Q pertengahan BC, tentukan PQ.

5. Perhatikan gambar kubus ABCD.EFGH. Tentukan jarak titik H ke DF.

6. Dalam kubus ABCD.EFGH titik S adalah titik tengah sisi CD dan P adalah titik tengah diagonal ruang BH. Tentukan perbandingan volum limas P.BCS dan volum kubus ABCD.EFGH.
7. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a cm. S merupakan proyeksi titik C pada bidang AFH.Tentukan jarak titik A ke titik S.
8. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk cm. P dan Q masing-masing merupakan titik tengah AB dan CD, sedangkan R merupakan titik potong EG dan FH. Tentukan jarak titik R ke bidang EPQH.
9. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 4 cm. P titik tengah EH. Tentukan jarak titik P ke garis CF.
10. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH adalah 6 cm. Tentukan jarak titik C dengan bidang BDG.

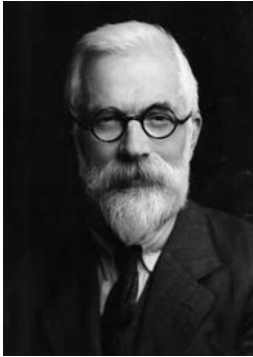
Statistika

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
3.2 Menentukan dan menganalisis ukuran pemusatan dan penyebaran data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram. 4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penyajian data hasil pengukuran dan pencacahan dalam tabel distribusi frekuensi dan histogram.	Melalui pembelajaran pengolahan dan penyajian data berkelompok, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengolah data mentah dan memaknai hasil yang diperoleh. 2. Memaknai grafik dari suatu data yang berupa histogram, poligon frekuensi, dan ogive. 3. Mengantisipasi kesalahan pengambilan kesimpulan dalam memaknai suatu grafik.

Istilah Penting

1. Distribusi Frekuensi
2. Histogram
3. Ogive
4. Poligon frekuensi
5. Rata-rata
6. Median
7. Modus
8. Simpangan Rata-rata
9. Simpangan Baku
10. Ragam

Biografi Ronald A. Fisher

Ronald Aylmer Fisher lahir di London pada tanggal 17 Februari 1890. Fisher merupakan tokoh statistika yang menemukan banyak konsep baru dalam statistika, di antaranya adalah konsep "likelihood", distribusi, dan variansi.

Pada saat usia Fisher masih 14 tahun, ibunya meninggal karena sakit. Namun hal ini tidak mematahkan semangatnya dalam belajar. Dia memenangkan medali dalam kompetisi essay matematika yang diadakan sekolahnya dua tahun kemudian. Kejuaraan ini yang membawanya mendapatkan beasiswa ke Cambridge University untuk belajar matematika dan astronomi.

Selain untuk belajar dua bidang tersebut, Fisher juga tertarik dalam biologi, khususnya bidang genetika. Kemudian dia menggabungkan ilmu statistika dan genetika dan menjadi peneliti dalam dalam bidang genetika yang dianalisa menggunakan ilmu statistika.

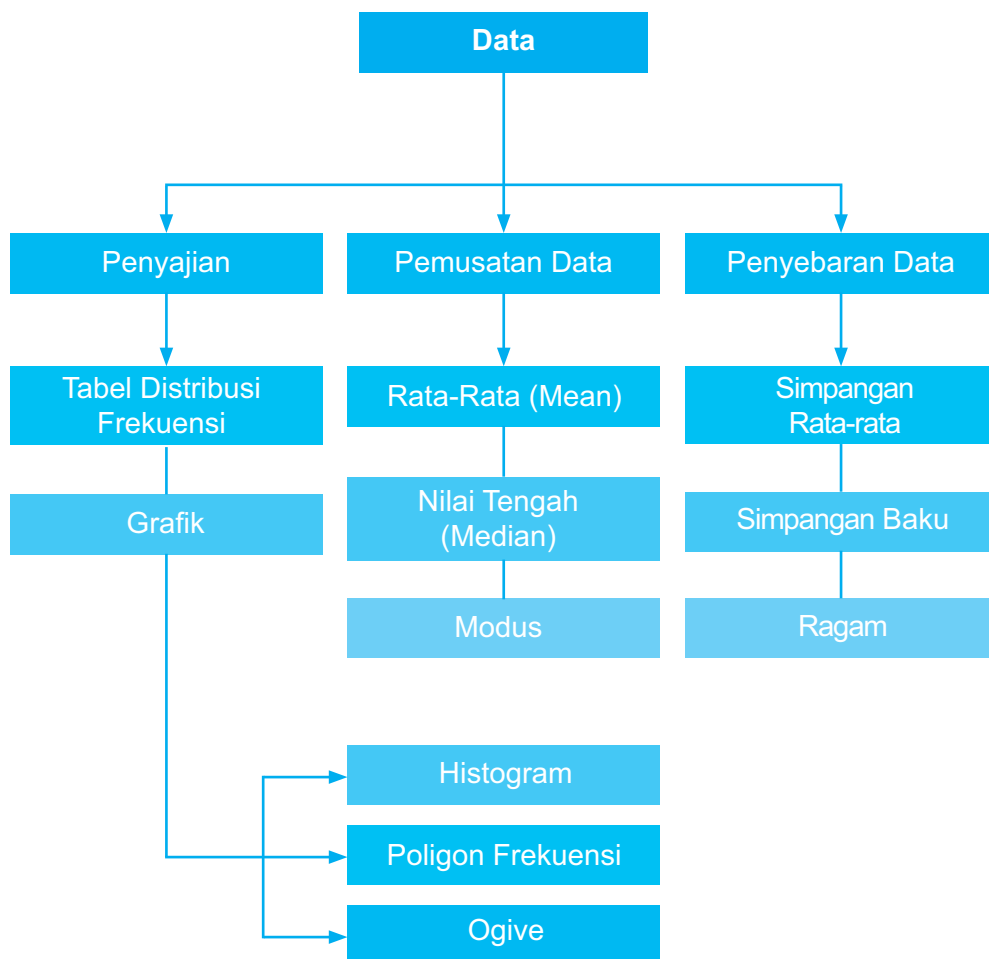
Ketika terjadi peperangan di Inggris pada tahun 1914, Fisher ingin mendaftarkan dirinya ke dalam militer. Tes kesehatan yang dilaluinya untuk masuk militer memperlihatkan hasil yang bagus kecuali untuk penglihatannya dan akhirnya Fisher ditolak untuk masuk militer. Hal ini yang kemudian membawanya untuk menjadi guru matematika dan fisika di beberapa sekolah dan akhirnya menjadi peneliti terkenal dalam bidang statistika dan genetika.

Sumber: *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fisher.html*

Hikmah yang dapat diambil:

Kekurangan fisik tidak mematahkan semangat untuk terus tetap berkarya dalam bidang yang diminati.

Kegagalan dalam suatu bidang bukan berarti kegagalan dalam bidang lainnya. Kegagalan merupakan langkah awal kesuksesan dalam bidang lainnya.

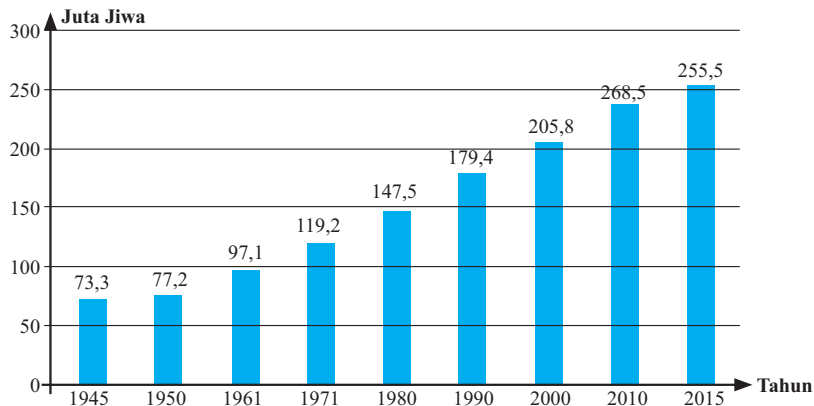
B. Diagram Alur Konsep

C. Materi Pembelajaran

Laju Pertumbuhan Penduduk Indonesia

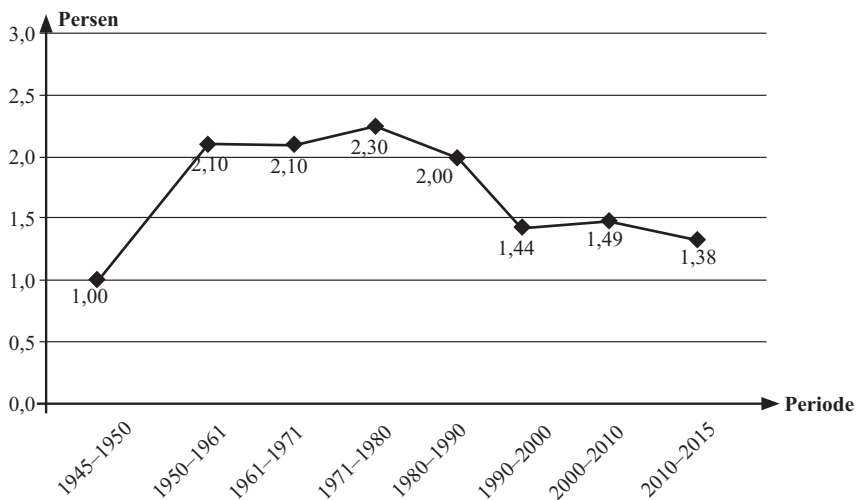
Sumber: *http://www.beritasatu.com/nasional/448693-tahun-2035-penduduk-indonesia-diprediksi-3057-juta.html*

Gambar 2.1. Sebagian penduduk Indonesia

Sejak kemerdekaan Republik Indonesia, jumlah penduduk Indonesia telah meningkat tiga kali lipat dari 73,3 juta jiwa pada 1945 menjadi 255,5 juta jiwa pada tahun 2015. Hal ini menempatkan Indonesia pada posisi negara keempat di dunia dengan penduduk terbanyak setelah Tiongkok (1,4 miliar jiwa), India (1,3 miliar jiwa), dan Amerika Serikat (325 juta jiwa).

Jumlah penduduk Indonesia mulai tahun 1945 sampai tahun 2015 ditampilkan pada tabel di bawah ini.

Sumber: BPS

Gambar 2.2. Jumlah peduduk Indonesia 1945 - 2015

Ditinjau dari laju pertumbuhan penduduk, diagram di bawah ini memperlihatkan bahwa laju pertumbuhan penduduk Indonesia bervariasi. Mulai tahun 1945 sampai tahun 1980, laju pertumbuhan penduduk naik secara signifikan. Kemudian laju pertumbuhan penduduk mengalami penurunan sampai pada tahun 2000 dan diikuti kenaikan lagi pada 10 tahun berikutnya.

Sumber: BPS

Gambar 2.3. Laju pertumbuhan penduduk 1945 - 2015

Dengan menganalisa data tersebut dengan ilmu statistika, jumlah penduduk Indonesia pada 47 tahun ke depan dapat diprediksi berlipat ganda. Tentu hal ini membutuhkan upaya yang serius dari pemerintah untuk mengendalikan tingkat kelahiran sehingga menekan laju pertumbuhan penduduk pada kurun waktu 2010-2015. Namun demikian, pemerintah masih perlu memperhatikan faktor-faktor lain yang memengaruhi pertumbuhan penduduk dengan menganalisa data-data pendukung dengan ilmu statistika. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa ilmu statistika dapat digunakan sebagai alat bantu pembuat kebijakan baik tingkat daerah maupun tingkat pusat pemerintahan.

Subbab 2.1 Penyajian Data

Kegiatan 2.1.1 Distribusi Frekuensi

Ketika seseorang peneliti ingin mengetahui kondisi suatu hal tidak jarang peneliti harus mengumpulkan data terlebih dahulu. Sebagai contoh, seorang peneliti ingin mengetahui kondisi jumlah penduduk Indonesia selama 20 tahun sebelumnya. Dengan demikian peneliti dapat mengumpulkan data jumlah penduduk Indonesia setiap tahunnya kemudian dapat mendiskripsikan, mendapatkan informasi yang berguna mengenai jumlah penduduk, dan bahkan dapat memprediksi keadaan jumlah penduduk Indonesia di tahun-tahun mendatang.

Jika seorang peneliti akan mengumpulkan data mengenai usia seluruh siswa SMA kelas XII di kabupaten Malang. Jika data yang dikumpulkan meliputi seluruh siswa sekabupaten Malang, maka data keseluruhan tersebut disebut populasi. Di lain pihak, ketika peneliti hanya mengumpulkan data dari beberapa SMA terpilih yang mewakili semua SMA di kabupaten Malang, maka data yang diperoleh merupakan data dengan nilai perkiraan sedangkan siswa SMA yang mewakili tersebut disebut dengan sampel.

Pada jenjang sebelumnya Anda sudah mempelajari tentang pengolahan data dan penyajiannya yang melibatkan jumlah data yang kecil. Bagaimana jika data yang diolah dalam jumlah besar? Jika terdapat sekelompok data yang lebih dari 30 data disajikan dengan diagram batang, bagaimana kira-kira diagram batang yang didapatkan? Pada bab ini kita berhadapan dengan data yang berukuran besar (minimal 30 data). Kita akan mempelajari bagaimana mengolah dan menyajikan data berukuran besar dengan lebih efisien dan bermakna.

Salah satu cara pengorganisasian data yang dapat digunakan untuk mempermudah penarikan kesimpulan adalah menyajikan data mentah ke dalam distribusi frekuensi dan memvisualisasikan ke dalam bentuk grafik.

Pada bagian ini akan dipaparkan mengenai pengolahan data ke dalam distribusi frekuensi untuk mendapatkan informasi yang berguna tentang data tersebut.

Contoh Soal 2.1

Seorang peneliti melakukan survey terhadap 80 pengusaha dalam suatu pertemuan mengenai pada usia berapa mereka berani untuk memulai usahanya. Hasil survei tersebut diberikan di bawah ini. Data disajikan dalam satuan tahun.

18	24	19	28	30	19	35	40	23	21
26	34	27	40	38	30	21	24	22	18
32	17	18	21	26	33	35	20	28	27
26	34	31	37	40	17	18	18	20	33
16	20	18	36	35	24	39	19	31	31
26	28	19	35	31	31	28	21	23	26
20	24	24	29	30	30	26	29	28	20
19	28	30	32	38	40	25	25	31	21

Dengan mengolah data ke dalam distribusi frekuensi, peneliti dapat menyimpulkan bahwa pengusaha yang memulai usahanya paling muda adalah 16 tahun dan yang paling tua adalah 40 tahun. Hampir setengah dari kumpulan pengusaha tersebut yang memulai usahanya di usia 20-an. Kebanyakan pengusaha memulai usahanya pada usia 26 – 30 tahun sedangkan paling sedikit pada usia 36 – 40 tahun.

Contoh Soal 2.2

Nilai ujian akhir mata pelajaran Matematika siswa kelas XII SMA "BINTANG" dapat dilihat di bawah ini.

85	67	58	75	90	44	100	78	95	64	86
51	69	76	60	90	85	86	94	60	70	70
78	80	80	100	65	76	92	74	68	59	85
90	58	64	78	65	85	75	78	82	84	95

Informasi yang dapat diambil dari data tersebut diantaranya adalah 50% siswa dalam kelas tersebut mendapatkan nilai pada rentangan 71 – 90. Hanya ada 1 siswa yang mendapatkan nilai antara 41 – 50, sedangkan 6 siswa mendapatkan nilai istimewa, yaitu di atas 90.

Contoh Soal 2.3

Posyandu "Mawar" mendata berat badan balita yang datang di pertemuan rutin pada bulan Oktober. Data berat badan (dalam kg) balita yang datang diberikan di bawah ini.

5,2	6,1	7,8	10,5	3,8	5,6	7,3	8	10,7	4,8
6,9	5,4	9,6	8,9	12,4	11,5	10,8	6,7	7,9	8,2
9,7	5,8	6,7	8,1	6,1	7	9,5	10,2	12	10

Data tersebut mengungkapkan bahwa kebanyakan balita yang datang pada posyandu tersebut mempunyai berat badan 5,4 – 11 kg. Terdapat hanya 3 balita dengan berat di bawah 5,4 kg dan hanya 3 balita dengan berat badan di atas 10,5 kg.

Berdasarkan hasil pengamatan ketiga contoh yang diberikan di atas, tulislah informasi-informasi atau istilah penting yang dapat Anda peroleh pada kotak yang disediakan berikut.

Ayo Menanya

Setelah mengamati ketiga contoh di atas, buatlah minimal 3 pertanyaan mengenai data dan penarikan kesimpulan yang dilakukan pada ketiga contoh tersebut. Tuliskan pertanyaan Anda pada kotak yang sudah disediakan di bawah ini.

Berikut merupakan pertanyaan-pertanyaan yang mungkin Anda ajukan sebelumnya.

1. Bagaimana mendeskripsikan data yang diperoleh?
2. Bagaimana mengolah data agar mendapat deskripsi data yang tepat?
3. Bagaimana membuat distribusi frekuensi dari data mentah?
4. Bagaimana mendapatkan informasi tentang data melalui distribusi frekuensi?

Dengan diskusi kelompok, Anda dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan secara bersama-sama untuk memahami lebih lanjut bagaimana memaknai suatu data melalui distribusi frekuensi. Anda juga dapat membaca atau mencari informasi dari berbagai sumber lain berupa buku teks atau sumber di internet untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan yang telah Anda dapatkan.

Berikut diberikan contoh-contoh untuk menggambarkan pengolahan data dari data tunggal menjadi data berkelompok dengan distribusi frekuensi.

Contoh Soal 2.4

Perhatikan data yang diberikan pada Contoh 2.1 sebelumnya. Jika data 80 usia pengusaha memulai usahanya dibagi menjadi 5 kelompok/kelas maka akan didapatkan distribusi frekuensi seperti di bawah ini.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
16 – 20	15,5 – 20,5	19
21 – 25	20,5 – 25,5	15
26 – 30	25,5 – 30,5	21
31 – 35	30,5 – 35,5	16
36 – 40	35,5 – 40,5	9

Tabel 2.1. Distribusi frekuensi usia pengusaha

Informasi-informasi mengenai data usia pengusaha dapat diperoleh dengan lebih mudah dengan distribusi frekuensi daripada hanya melihat data mentah sebelumnya.

Contoh Soal 2.5

Data nilai ujian akhir matematika yang disajikan pada Contoh 2.2 dapat dikelompokkan menjadi beberapa kelompok data. Jika dikelompokkan menjadi 6 kelas, maka distribusi frekuensi yang didapatkan adalah sebagai berikut.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
41 – 50	40,5 – 50,5	1
51 – 60	50,5 – 60,5	6
61 – 70	60,5 – 70,5	9
71 – 80	70,5 – 80,5	11
81 – 90	80,5 – 90,5	11
91 – 100	90,5 – 100,5	6

Tabel 2.2. Distribusi frekuensi nilai ujian matematika

Jika Anda perhatikan, deskripsi data nilai ujian akhir matematika yang dipaparkan pada Contoh 2.2 merupakan interpretasi dari distribusi frekuensi di atas.

Contoh Soal 2.6

Di lain pihak, jika data berat badan balita pada suatu posyandu pada Contoh 2.3 dikelompokkan menjadi 5 kelas maka akan didapatkan distribusi frekuensi berikut ini.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
3,5 – 5,3	3,45 – 5,35	3
5,4 – 7,2	5,35 – 7,25	9
7,3 – 9,1	7,25 – 9,15	7
9,2 – 11	9,15 – 11,05	8
11,1 – 12,9	11.05 – 12,95	3

Tabel 2.3. Distribusi frekuensi berat badan balita

Berdasarkan distribusi frekuensi yang diperoleh, didapatkan informasi bahwa kebanyakan balita yang datang di posyandu tersebut mempunyai berat badan 5,4 – 7,2 kg. Hal ini sesuai dengan informasi yang dipaparkan pada Contoh 2.3.

Coba Anda beri perhatian khusus mengenai banyak kelas, rentangan tiap kelas, batas kelas, dan frekuensi tiap kelasnya. Mungkin pertanyaan selanjutnya yang muncul di benak Anda adalah bagaimana mendapatkan frekuensi tiap kelas.

Untuk mengetahui bagaimana mendapatkan frekuensi pada distribusi frekuensi, coba Anda tentukan banyaknya data pada tiap kelas berikut ini.

Perhatikan data usia pengusaha yang disajikan pada Contoh 2.1. Jika data tersebut dikelompokkan menjadi 7 kelompok, maka distribusi frekuensi yang diperoleh adalah sebagai berikut. Lengkapi kolom batas kelas dan frekuensi berdasarkan data usia pengusaha pada Contoh 2.1.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
16 – 19		
20 – 23		
24 – 27		
28 – 31		
32 – 35		
36 – 39		
40 – 43		

Tabel 2.4. Distribusi Frekuensi usia pengusaha dengan 7 kelas

Dengan distribusi frekuensi yang diperoleh di atas, coba berikan beberapa pernyataan mengenai informasi apa saja yang dapat Anda simpulkan dari pengelompokan tersebut.

Pada kolom kelas pada Tabel 2.4, kelas pertama dimulai dengan 16 sampai dengan 19. Kemudian kelas berikutnya dimulai dengan satu lebihnya dari 19, yaitu 20. Tetapi bagaimana jika pembagian kelas atau kelompok data usia pengusaha pada Contoh 2.1 seperti pada Tabel 2.5 berikut ini? Coba lengkapi kolom batas kelas dan kolom frekuensi pada distribusi frekuensi di berikut ini.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
16 – 19		
19 – 22		
22 – 25		
25 – 28		
28 – 31		
31 – 34		
34 – 37		
37 – 40		

Tabel 2.5. Distribusi frekuensi usia pengusaha

Setelah mengisikan kolom batas kelas dan frekuensi, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

1. Apa yang terjadi pada kolom batas kelas?
2. Apa yang terjadi pada saat pengisian kolom frekuensi?
3. Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai batas atas dan batas bawah kelas dalam hubungannya dengan frekuensi?

Selanjutnya perhatikan Tabel 2.4 distribusi frekuensi untuk data usia pengusaha dengan 7 kelas, panjang (rentangan) setiap kelas sama yaitu 4. Perhatikan bahwa 4 merupakan selisih batas atas kelas dengan batas bawah kelas yang sama. Sebagai contoh, 4 = 19,5 – 15,5 = 23,5 – 19,5. Pertanyaan selanjutnya yang mungkin timbul, mengapa 4 yang digunakan sebagai panjang kelas?

Panjang kelas yang dibutuhkan sangat berhubungan erat dengan nilai maksimum, nilai minimum, dan banyak kelas yang diinginkan dalam distribusi frekuensi. Coba Anda perhatikan kembali data usia 80 pengusaha yang diberikan sebelumnya. Jika Anda amati, berapa selisih nilai maksimum dan nilai minimum pada data tersebut? Jika peneliti ingin mengelompokkan data menjadi 7 kelompok/kelas, maka berapa panjang (rentangan) kelas yang dibutuhkan agar menjadi 7 kelas dengan panjang kelas yang sama? Dengan pembulatan, Anda akan mendapatkan panjang kelas yang dibutuhkan.

Berdasarkan kegiatan-kegiatan sebelumnya, buatlah kesimpulan sementara tentang langkah-langkah pembuatan tabel distribusi frekuensi dan kegunaannya. Gunakan kesimpulan tersebut untuk membuat tabel distribusi frekuensi dari data berikut dengan banyak kelas sesuai yang Anda inginkan kemudian ceritakan atau maknai distribusi frekuensi yang diperoleh.

Contoh Soal 2.7

Suhu Udara Kota Jakarta

Berdasarkan data BMKG, suhu udara tertinggi kota Jakarta dalam derajat Celcius pada bulan September 2015 diberikan di bawah ini:

33,6	34,0	34,6	33,9	33,4	33,0	32,4	33,2	34,4	35,0
34,2	35,2	35,5	35,6	35,2	34,2	35,0	35,4	35,4	35,0
35,3	35,2	35,6	36,2	37,0	34,4	34,6	33,0	35,0	35,2

Sumber: *www.bmkg.go.id*

Tuliskan distribusi frekuensi yang diperoleh dan maknanya pada kotak yang disediakan berikut ini.

Diskusikan dengan teman sebangku Anda mengenai kesimpulan sementara tentang pembuatan distribusi frekuensi, hal-hal yang perlu diperhatikan dalam pembuatan distribusi frekuensi dan pemaknaannya. Jangan lupa untuk mendiskusikan juga Contoh 2.7 untuk memperjelas pemahaman Anda tentang distribusi frekuensi. Selanjutnya lakukan diskusi kelas untuk mendapatkan kesimpulan kelas dengan bimbingan dari guru Anda. Tuliskan secara individu kesimpulan yang diperoleh pada kotak yang disediakan.

Kegiatan 2.1.2 Histogram, Poligon Frekuensi, dan Ogive

Setelah mengelompokkan data ke dalam beberapa kelas menjadi distribusi frekuensi, Anda dapat menyajikan data berkelompok tersebut dalam bentuk grafik. Penyajian dalam bentuk grafik ini bertujuan untuk menyampaikan data kepada pembaca dalam bentuk gambar. Bagi kebanyakan orang, melihat informasi yang disajikan dari gambar lebih mudah daripada melihat dari dari kumpulan bilangan-bilangan pada tabel atau distribusi frekuensi. Hal ini juga berlaku bahkan untuk orang-orang yang tidak punya pengetahuan sebelumnya tentang statistika.

Grafik-grafik yang menyajikan suatu data digunakan untuk mendeskripsikan suatu data dengan lebih mudah dan untuk menganalisis lebih lanjut. Penyajian data berupa grafik tentu akan lebih menarik perhatian pembaca atau peserta suatu presentasi. Selain mempermudah memaknai suatu data, grafik juga digunakan untuk melihat perilaku (behaviour) atau tren dari data tersebut.

Terdapat tiga macam grafik yang biasanya digunakan untuk mempresentasikan data berkelompok, yaitu:

1. Histogram;
2. Poligon frekuensi;
3. Ogive/grafik frekuensi kumulatif.

Pada bagian ini akan dibahas mengenai penyajian data berkelompok ke dalam bentuk ketiga grafik di atas.

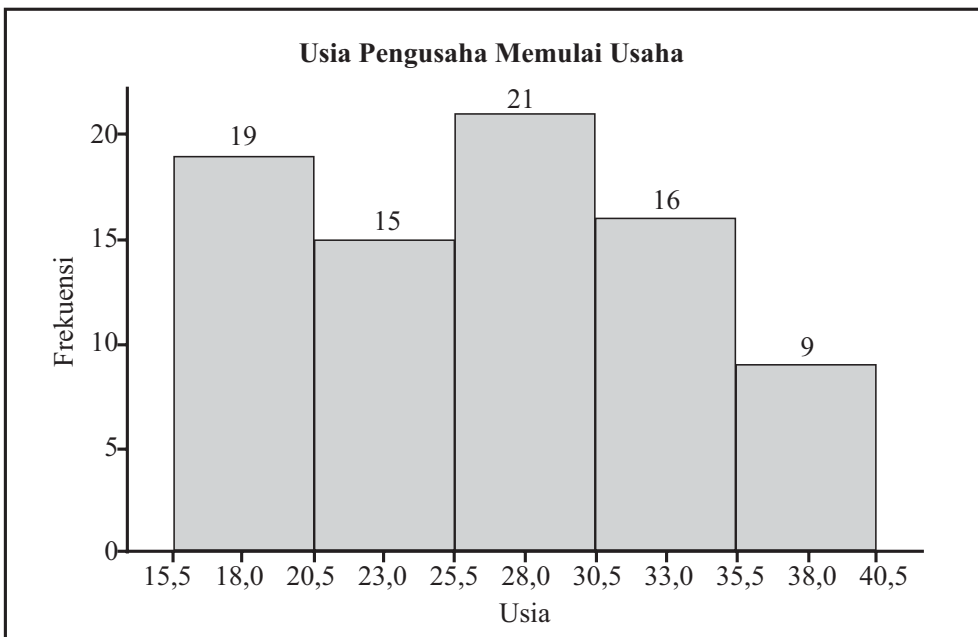
Pada bagian ini diberikan beberapa contoh distribusi frekuensi yang disajikan dalam grafik berupa histogram, poligon frekuensi, dan ogive. Coba Anda amati dalam penyajian grafik tersebut apa saja yang dibutuhkan untuk menggambar ketiga grafik tersebut.

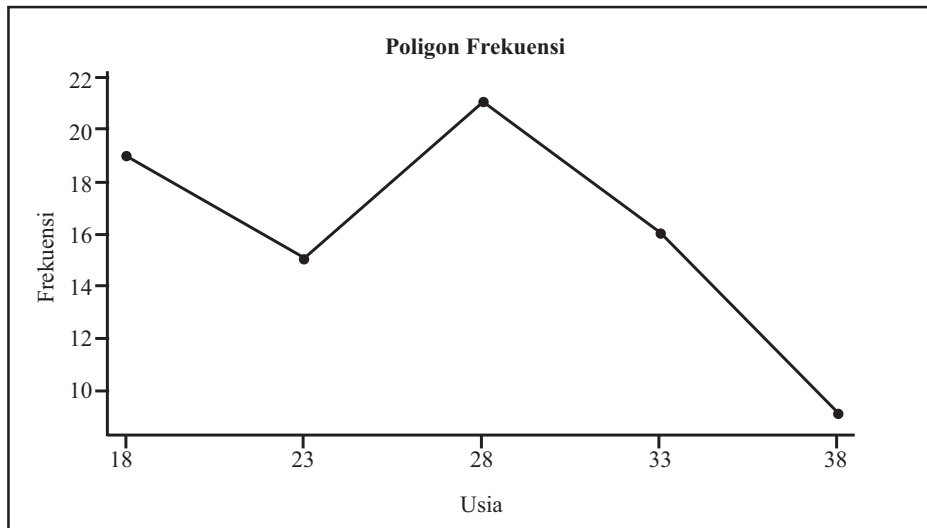
Contoh Soal 2.8

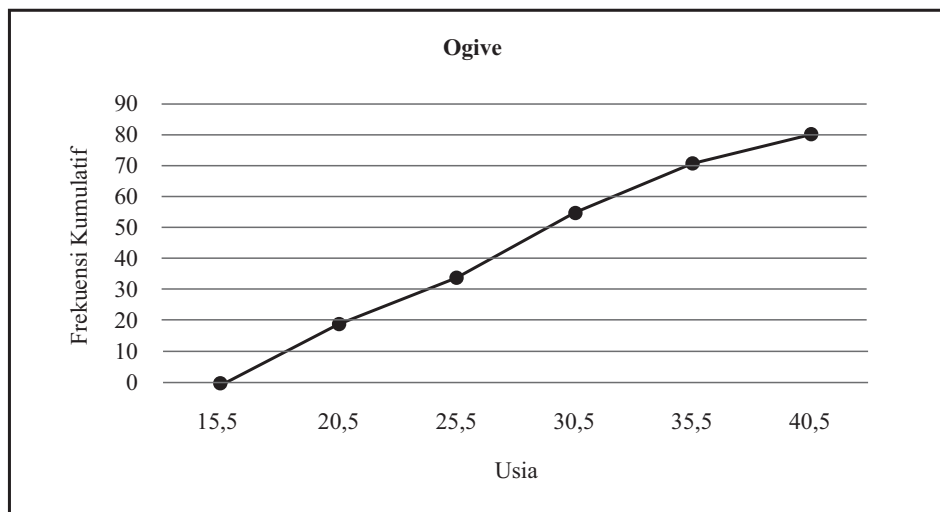
Distribusi frekuensi pada Tabel 2.1 menyajikan data berkelompok usia pengusaha dalam memulai usahanya. Distribusi frekuensi tersebut disajikan dibawah ini.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
16 – 19	15,5 – 20,5	19
21 – 25	20,5 – 25,5	15
26 – 30	25,5 – 30,5	21
31 – 35	30,5 – 35,5	16
36 – 40	35,5 – 40,5	9

Di bawah ini merupakan grafik-grafik yang merepresentasikan distribusi frekuensi tersebut.

a. Histogram

Grafik 2.1. Histogram usia pengusaha

b. Poligon frekuensi

Grafik 2.2. Poligon frekuensi usia pengusaha

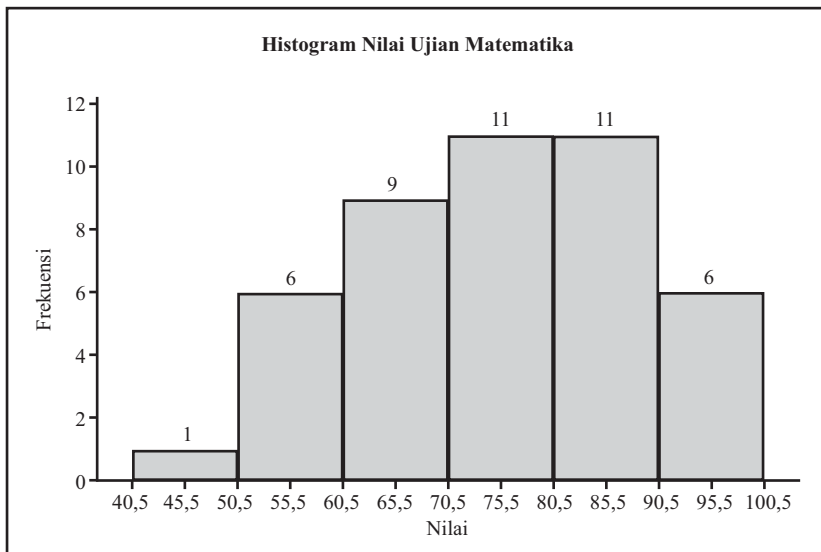
c. Ogive

Grafik 2.3. Ogive usia pengusaha

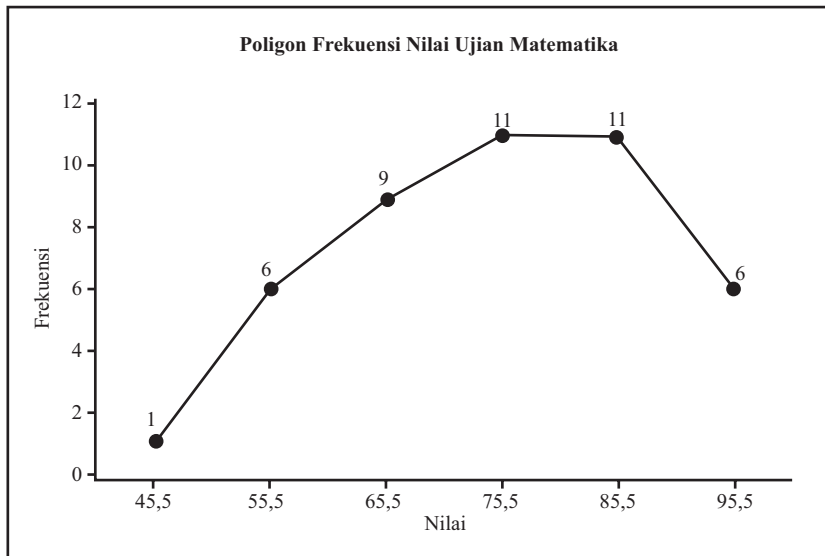
Contoh Soal 2.9

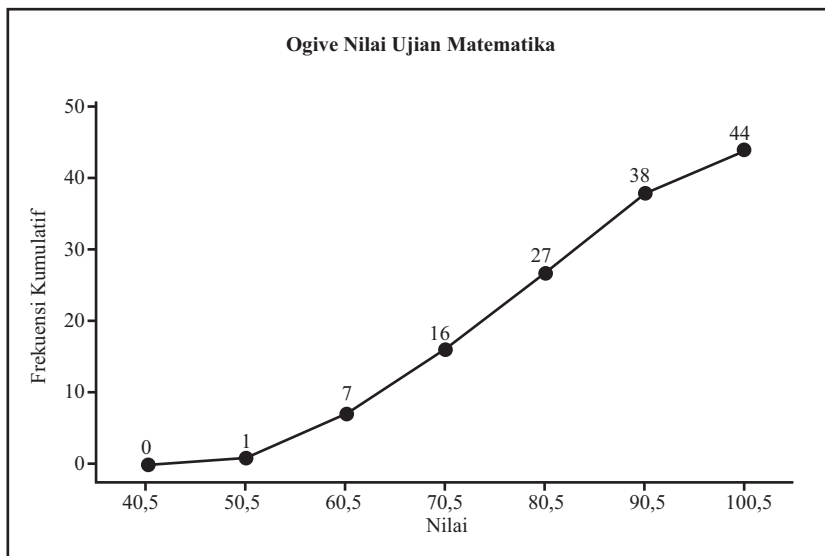
Distribusi frekuensi pada Tabel 2.2 menyajikan tentang data berkelompok nilai ujian matematika suatu kelas. Distribusi yang diberikan adalah sebagai berikut.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
41 – 50	40,5 – 50,5	1
51 – 60	50,5 – 60,5	6
61 – 70	60,5 – 70,5	9
71 – 80	70,5 – 80,5	11
81 – 90	80,5 – 90,5	11
91 – 100	90,5 – 100,5	6

Selanjutnya distribusi frekuensi ini diubah ke dalam grafik histogram, poligon frekuensi, dan ogive yang disajikan berikut ini.

a. Histogram

Grafik 2.4. Histogram nilai ujian mate matika

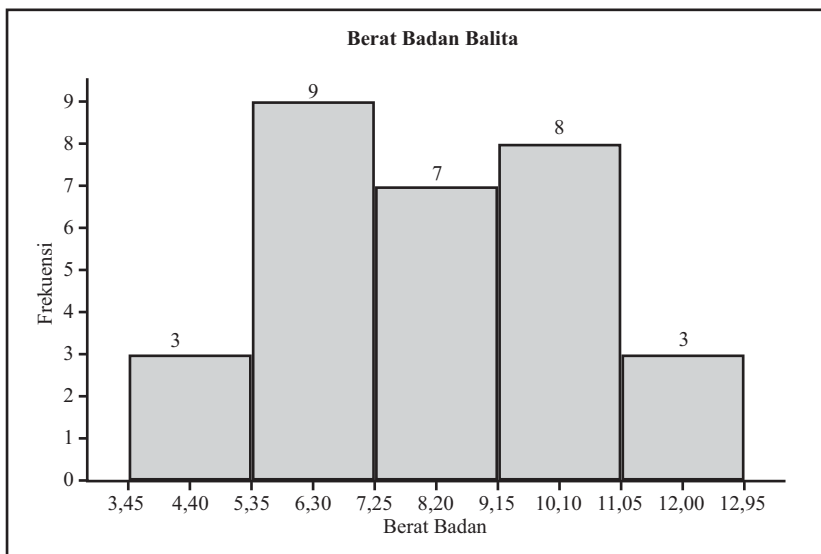
b. Poligon frekuensi

Grafik 2.5. Poligon frekuensi nilaiujian matematika

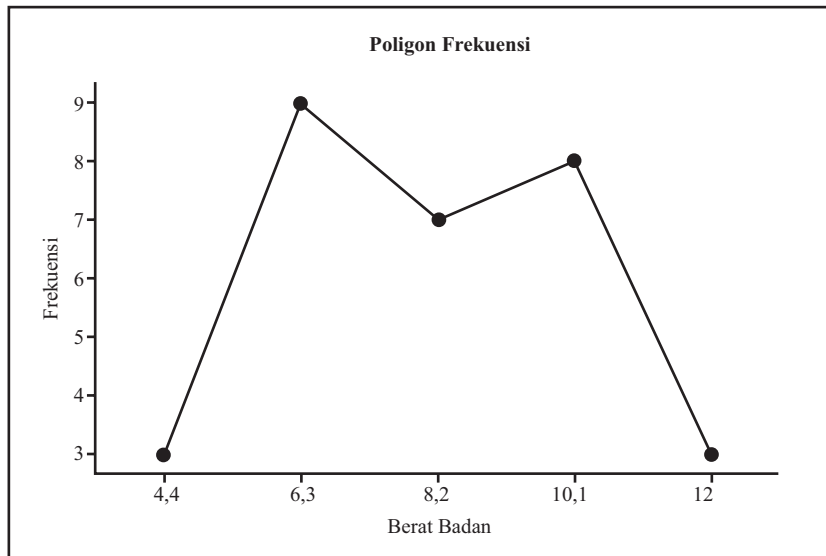
c. Ogive

Grafik 2.6. Ogive nilai ujian matematika

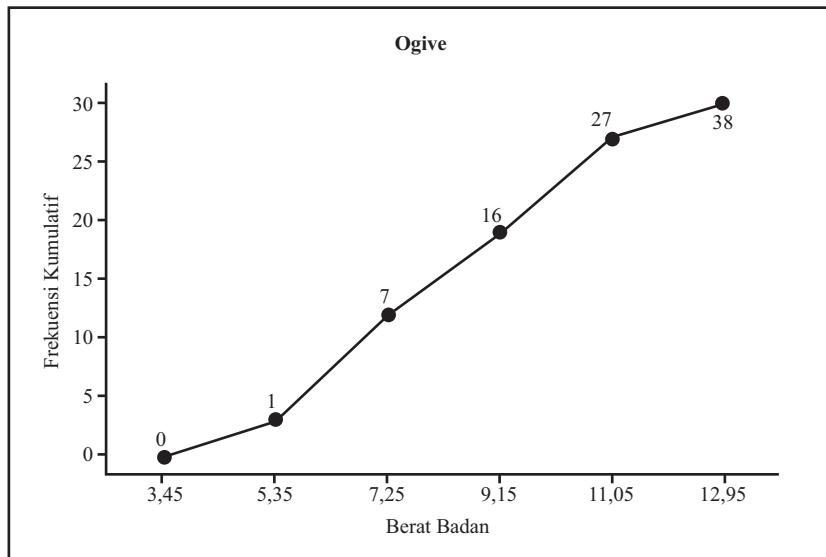
Contoh Soal 2.10

Distribusi frekuensi pada Tabel 2.3 menyajikan data berkelompok berat badan balita yang datang pada suatu posyandu. Berikut histogram, polygon frekuensi, dan ogive untuk distribusi frekuensi tersebut.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
3,5 – 5,3	3,45 – 5,35	3
5,4 – 7,2	5,35 – 7,25	9
7,3 – 9,1	7,25 – 9,15	7
9,2 – 11	9,15 – 11,05	8
11,1 – 12,9	11.05 – 12,95	3

a. Histogram

Grafik 2.7. Histogram berat badan balita

b. Poligon frekuensi

Grafik 2.8. Poligon frekuensi berat badan balita

c. Ogive

Grafik 2.9. Ogive berat badan balita

Berdasarkan pengamatan Contoh 2.8, Contoh 2.9, dan Contoh 2.10, tulislah informasi-informasi atau istilah matematika penting yang dapat Anda peroleh pada kotak yang disediakan berikut.

Ayo Menanya

Dengan mengamati Contoh 2.8 – 3.10, coba Anda buat beberapa pertanyaan mengenai distribusi frekuensi dan grafik histogram, poligon frekuensi, dan ogive. Tuliskan pertanyaan apapun yang terlintas di benak Anda mengenai data berkelompok dan grafiknya. Anda tidak perlu takut atau malu terhadap guru maupun teman Anda. Pertanyaan yang Anda ajukan akan sangat membantu Anda dalam memahami materi yang bersangkutan. Tuliskan pertanyaan-pertanyaan Anda dalam kotak yang sudah disediakan di bawah ini.

Mudah-mudahan Anda menanyakan beberapa hal berikut ini.

a. Bagaimana menggambarkan histogram, poligon frekuensi, dan ogive?
b. Hal-hal apa saja yang perlu diperhatikan dalam membuat histogram, poligon frekuensi, dan ogive?
c. Apa makna bilangan-bilangan pada sumbu-x dan sumbu-y pada poligon frekuensi?

Jika Anda menanyakan diantaranya adalah hal-hal tersebut di atas, maka Anda selangkah lebih dekat dalam memahami penyajian data berupa grafik. Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan yang Anda susun, Anda dapat melakukan kegiatan-kegiatan berikut. Anda juga dapat menggunakan sumber-sumber referensi lainnya seperti buku teks atau Internet untuk membantu Anda menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut.

Jika Anda perhatikan, data yang sama dapat disajikan dalam dua bentuk penyajian yang berbeda yaitu penyajian dalam bentuk tabel (distribusi frekuensi) dan grafik. Tentu penyajian data tersebut dilakukan dengan tujuan mempermudah pembaca dalam memaknai data. Selain itu penyajian data dalam bentuk grafik dapat lebih cepat menarik perhatian pembaca.

Sebagai contoh perhatikan histogram yang ditampilkan pada Contoh 2.8. Distribusi frekuensi dan histogram tersebut menyajian data yang sama, tetapi dengan melihat histogram sekilas kita dapat menarik kesimpulan tentang kelas yang paling banyak dan yang paling sedikit. Yang lebih penting lagi, kita juga dapat melihat perubahan (*trend*) dari kelas ke kelas dengan lebih mudah. Kelas dengan frekuensi terbanyak pada histogram tersebut adalah kelas dengan batas kelas 25,5 – 30,5. Perhatikan pada sumb-x tertera angka 28,0 di tengah selang kelas tersebut. Mereperesentasi apakah angka 28,0 pada kelas tersebut?

Selain pada histogram, angka 28 juga muncul pada poligon frekuensi dari data dan kelas yang sama. Pada poligon frekuensi Contoh 2.8 muncul angka-angka yang lain yaitu 18, 23, 33, dan 38. Merepresentasi apakah angka-angka tersebut terhadap kelas-kelas yang diwakili?

Perhatikan bahwa selisih dua angka yang mewakili kelas yang berurutan mempunyai selisih yang sama dengan pangjang kelas. Akibatnya jika angka yang mewakili salah satu kelas diketahui maka dengan mudah kita dapat menentukan angka-angka yang mewakili kelas-kelas yang lain.

Perhatikan kelas pertama pada distribusi frekuensi pada Contoh 2.8. Kelas tersebut mempunyai batas bawah 15,5 dan batas atas 20,5 dengan panjang kelas 5. Angka yang mempresentasi kelas tersebut pada poligon frekuensi adalah 18. Angka 18 dapat diperoleh dari jumlah batas atas dan bawah kelas tersebut dibagi dengan 2, yaitu $18 = \frac{15,5 + 20,5}{2}$. Angka yang mewakili tersebut disebut

dengan titik tengah (*midpoint*). Coba Anda periksa apakah angka-angka di sumbu-x pada poligon frekuensi Contoh 2.8 merupakan titik tengah dari masing-masing kelas. Selain itu, coba Anda periksa lebih lanjut bagaimana mendapatkan titik tengah suatu kelas jika titik tengah kelas tertentu sudah diketahui.

Dengan demikian tentu Anda dapat membuat kesimpulan sementara bagaimana langkah-langkah mendapatkan histogram dan poligon frekuensi untuk suatu data berkelompok.

Berbeda dengan histogram dan poligon frekuensi, ogive menyajikan data berkelompok dengan cara yang lain. Untuk mengetahui bagaimana menyajikan ogive, Anda perhatikan lebih lanjut distribusi frekuensi dan ogive yang disajikan pada Contoh 2.10. Merepresentasi apakah angka-angka yang dituliskan di sumbu-x pada ogive tersebut? Lalu mengapa frekuensi pada angka 5,35 adalah 3 sedangkan pada angka 7,25 mempunyai frekuensi 12? Dilain pihak, kelas dengan batas 3,45 – 5,35 mempunyai frekuensi 3 dan kelas dengan batas 5,35 – 7,25 mempunyai frekuensi 9. Dengan kenyataan tersebut, dapatkah Anda menjawab pertanyaan mengapa pada ogive tersebut frekuensi pada angka 11,05 adalah 27?

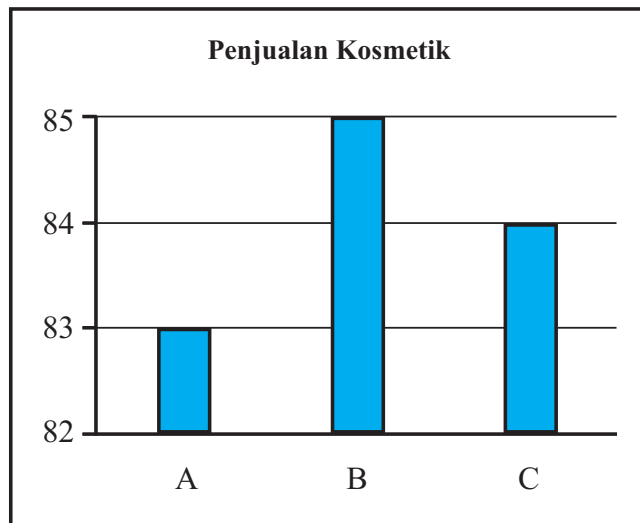
Jika Anda dapat mengkonfirmasi frekuensi setiap kelas pada ogive tersebut maka dapat dikatakan Anda sudah memahami langkah-langkah pembuatan ogive suatu data berkelompok.

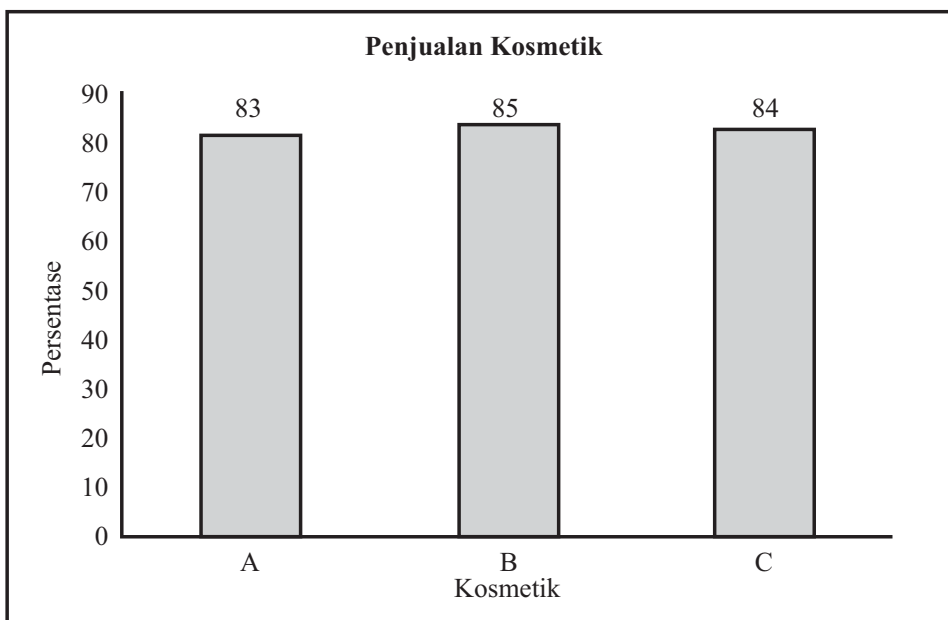
Untuk lebih memahami bagaimana menyajikan data berkelompok dalam bentuk grafik, coba Anda buat histogram, poligon frekuensi, dan ogive dari data yang diberikan pada Contoh 2.7. Setelah mendapatkan ketiga grafik, beri pemaknaan yang sesuai dari ketiga grafik yang diperoleh tersebut.

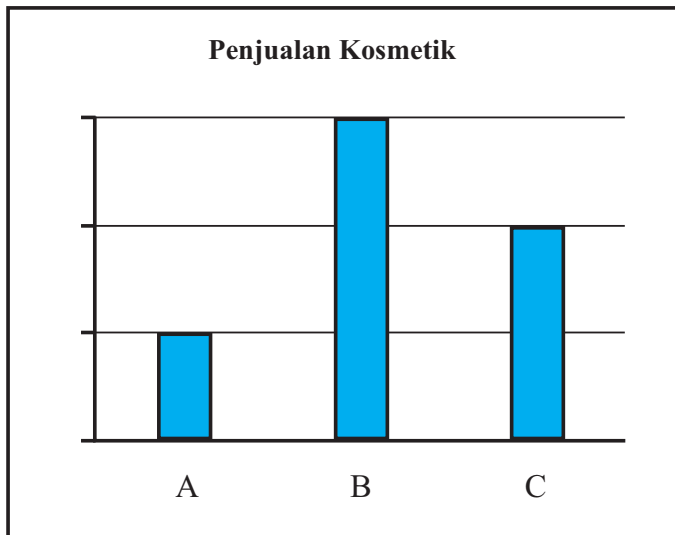
Coba Anda diskusikan dengan teman sebangku Anda mengenai langkah-langkah pembuatan histogram, poligon frekuensi, dan ogive. Selain itu, Anda diskusikan pula bagaimana memaknai grafik yang diperoleh. Dari ketiga grafik tersebut Anda dapat diskusikan pula grafik mana yang lebih mewakili data atau lebih menampilkan sifat-sifat data dengan lebih baik. Tuliskan kesimpulan sementara hasil diskusi dalam kotak yang disediakan.

Catatan:
Tanpa disadari, mungkin kita punya kesalahpahaman mengenai statistika (*statistical misconceptions*). Salah satu yang banyak terjadi adalah kesalahpahaman terhadap pemaknaan grafik yang berupa histogram. Setelah belajar statistika (pengelompokan data dan penyajiannya dalam bentuk grafik) diharapkan dapat mengurangi sedikit demi sedikit kesalahpahaman tentang statistika.

Banyak iklan produk yang menampilkan suatu data hasil survey dalam bentuk grafik untuk menunjukkan keampuhan atau larisnya produk tersebut. Jika pembaca atau penonton kurang cermat dalam memperhatikan grafik maka bisa terjadi penarikan kesimpulan yang salah. Ditambah lagi jika grafik data tersebut disajikan dengan tidak benar maka tentu akibatnya kita dapat salah dalam mengartikan grafik tersebut.

Sebagai contoh sebuah iklan kosmetik menampilkan hasil survey terhadap pembeli paket kosmetik A, B, atau C untuk pertama kali. Grafik yang disajikan berikut menampilkan berapa persentase konsumen yang memutuskan untuk kembali menggunakan paket yang sama dengan yang waktu dibeli pertama kali.

Grafik 2.10. Diagram batang penjualan kosmetik

Melihat grafik di atas dengan sekilas mungkin kita bisa mengatakan bahwa paket kosmetik B jauh lebih dipilih oleh konsumen dari kedua produk lainnya. Terdapat perbedaan yang nyata antara ketiga produk jika hanya melihat grafik tanpa melihat skala pada sumbu-y. Jika diperhatikan dengan seksama, 83% konsumen kembali ke produk A, 85% kembali ke produk B, dan 84% kembali ke produk C. Grafik tersebut digambarkan dengan nilai awal pada sumbu-y adalah 82, tapi perhatikan jika nilai awal sumbu-y adalah 1 seperti pada grafik di bawah ini.

Grafik 2.11. Diagram batang penjualan kosmetik

Terlihat bahwa perbedaan antara ketiga produk tidak jauh. Masing-masing produk hanya terpaut 1%. Penampakan pada grafik pertama dapat menipu mata secara sekilas jika pembaca tidak mengamati dengan seksama skala pada sumbu-y. Memotong skala pada sumbu-y sebenarnya bukanlah hal yang dilarang, tetapi pembaca harus teliti dalam membaca grafik yang disajikan.
Grafik yang ditampilkan terkadang tidak menampakkan skala pada sumbu-y. Jika grafik penjualan kosmetik di atas kita tampilkan tanpa skala pada sumbu-y seperti di bawah ini, maka apa yang dapat Anda simpulkan?

Grafik 2.12. Diagram batang penjualan kosmetik tanpa skala

Kita tidak dapat mendapatkan informasi apa-apa mengenai grafik di atas kecuali urutan (rangking) dari A, B, dan C berdasarkan tinggi batang. Selain itu kita juga tidak mungkin mendapatkan informasi mengenai selisih persentase paket kosmetik hanya dengan menggunakan grafik tersebut.

Diskusikan kesimpulan sementara dengan teman sekelas Anda. Guru Anda akan memberikan kesempatan kepada minimal 5 siswa yang mau maju secara sukarela untuk mempresentasikan kesimpulan sementara di depan kelas. Diskusikan bersama hasil presentasi untuk mendapatkan kesimpulan akhir. Tuliskan kesimpulan akhir pada kotak yang disediakan berikut ini.

Masalah 2.1

1. Berikut ini diberikan empat distribusi frekuensi. Setiap distribusi frekuensi yang diberikan terdapat kesalahan dalam penyusunannya. Sebutkan kesalahan masing distribusi frekuensi dan alasannya.

a.

Kelas	Frekuensi
27 – 32	1
33 – 38	0
39 – 44	6
45 – 49	4
50 – 55	2

c.

Kelas	Frekuensi
123 – 127	3
128 – 132	7
138 – 142	2
143 – 147	19

b.

Kelas	Frekuensi
5 – 9	1
9 – 13	2
13 – 17	5
17 – 20	6
20 – 24	3

d.

Kelas	Frekuensi
9 – 13	1
14 – 19	6
20 – 25	2
26 – 28	5
29 – 32	9

2. Distribusi frekuensi yang diberikan berikut mempresentasikan jumlah kendaraan roda empat terpilih dalam suatu kota yang menghabiskan bahan bakar bensin dalam jumlah tertentu (liter) setiap minggunya. Kolom kelas menyatakan jumlah bahan bakar bensin yang dihabiskan dalam 1 minggu sedangkan kolom frekuensi adalah banyaknya kendaraan roda empat.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
5 – 8	4,5 – 8,5	5
9 – 12	8,5 – 12,5	8
13 – 16	12,5 – 16,5	7
17 – 20	16,5 – 20,5	15
21 – 24	20,5 – 24,5	21
25 – 28	24,5 – 28,5	16

Jawablah pertanyaan berikut ini.

a. Berapa banyak kendaraan roda 4 yang menghabiskan bensin kurang dari 4,5 liter?
b. Berapa banyak kendaraan roda 4 yang menghabiskan bensin kurang dari 8,5 liter?
c. Lanjutkan untuk mencari banyak kendaraan yang kurang dari batas bawah kelas kemudian tuliskan pada tabel di bawah ini.

	Frekuensi Kumulatif
Kurang dari 4,5	
Kurang dari 8,5	
Kurang dari 12,5	
Kurang dari 16,5	
Kurang dari 20,5	
Kurang dari 24,5	
Kurang dari 28,5	

Catatan: Tabel di atas disebut distribusi frekuensi kumulatif

3. Data berikut adalah data jumlah pengunjung perpustakaan SMA ”NASIONAL” dalam 40 hari kerja berturut-turut.

50	65	60	71	55	82	76	70	80	64
78	95	88	90	81	75	78	78	70	68
85	67	74	86	59	63	84	66	75	87
94	96	72	78	65	81	85	95	88	96

Berdasarkan data tersebut, buatlah

a. Distribusi frekuensi dengan 7 kelas
b. Histogram, poligon frekuensi, dan ogive untuk distribusi frekuensi poin (a).

4. Misalkan Anda adalah seorang pengusaha real estate di kota Masamba. Anda memperoleh daftar harga rumah yang sudah Anda jual dalam 6 bulan terakhir. Anda ingin mengorganisasi data yang Anda terima agar Anda dapat memberikan informasi yang akurat kepada calon pembeli. Gunakan data berikut ini untuk disajikan dalam histogram, poligon frekuensi, dan ogive. Data berikut dalam puluhan ribu rupiah.

142.000	127.000	99.600	89.000	93.000	99.500	162.000
73.800	135.000	119.000	67.900	156.300	104.500	108.650
123.000	91.000	205.000	110.000	156.300	104.000	133.900
179.000	112.000	147.000	321.550	87.900	88.400	180.000
159.400	205.300	144.400	163.000	96.000	81.000	131.000
114.000	119.600	93.000	123.000	187.000	96.000	80.000
231.000	189.500	177.600	83.400	77.000	132.300	166.000

   a. Pertanyaan-pertanyaan apa yang yang dapat dijawab dengan mudah dengan melihat histogram dibandingkan dengan daftar harga yang diberikan di atas?
   b. Pertanyaan berbeda apa yang dapat dijawab dengan lebih mudah dengan melihat poligon frekuensi dibandingkan dengan daftar harga tersebut?
   c. Pertanyaan berbeda apa yang dapat dijawab dengan lebih mudah dengan melihat ogive dibandingkan dengan daftar harga tersebut?
   d. Apakah ada data yang sangat besar atau sangat kecil dibandingkan dengan nilai lainnya?
   e. Grafik mana yang menampilkan nilai ekstrim tersebut dengan lebih baik?

5. Penelitian mengenai kebutuhan air minum bagi tubuh manusia dalam sehari sudah banyak dilakukan dan dipublikasikan. Carilah hasil penelitian tersebut dan ungkapkan berapa gelas atau liter air minum kebutuhan tubuh manusia. Kemudian kumpulkan data melalui wawancara terhadap minimal 40 teman Anda mengenai konsumsi air minum mereka sehari-hari (dalam satuan gelas atau liter). Jika data sudah terkumpul, maka lakukanlah kegiatan berikut.

a. Buatlah distribusi frekuensi data yang sudah dikumpulkan (pilih salah satu satuan yang digunakan, yaitu gelas atau liter) dengan banyak kelas yang Anda tentukan sendiri.
b. Buatlah histogram, poligon frekuensi, dan ogive dari distribusi yang didapatkan.
c. Buatlah distribusi kumulatifnya.

Subbab 2.2. Ukuran Pemusatan dan Penyebaran Data Berkelompok

Kegiatan sebelumnya Anda dapat memperoleh informasi-informasi dari data mentah dengan mengolah data tersebut ke dalam distribusi frekuensi dan menampilkan data ke dalam beberapa grafik. Pada bagian ini Anda akan mempelajari metode-metode statistika yang dapat digunakan untuk mendiskripsikan suatu data. Metode statistika yang paling umum digunakan adalah rata-rata. Sebagai contoh, dalam suatu artikel di koran online*, Erwin (2015) menyatakan bahwa Google melakukan wawancara online terhadap pemilik ponsel pintar di Indonesia antara usia 18 dan 64 tahun untuk mengetahui lebih baik mengenai perilaku mereka. Hasil wawancara yang dilansir Google menyatakan bahwa rata-rata aplikasi yang di-instal di Indonesia tahun 2015 adalah sebanyak 31 aplikasi per individu.

Pada contoh di atas, istilah rata-rata yang digunakan masih tidak jelas karena ada berbagai macam rata-rata. Beberapa diantaranya adalah rata-rata hitung, rata-rata geometri, rata-rata harmonik. Rata-rata merupakan pusat distribusi atau yang paling sering terjadi. Ukuran rata-rata disebut juga dengan ukuran pemusatan data. Ukuran pemusatan yang akan dibahas pada bagian ini meliputi rata-rata (dalam hal ini rata-rata hitung), median, dan modus untuk data berkelompok.

Kegiatan 2.2.1 Ukuran Pemusatan Data Berkelompok

Masih ingatkah Anda bagaimana menentukan rata-rata, median, dan modus untuk data tunggal? Sebagai contoh, diberikan data ukuran sepatu yang dipakai 12 pemain basket SMA Nasional sebagai berikut.

42 41 41 40 40 41 42 42 43 41 40 42

Coba Anda tentukan rata-rata, median dan modus dari data tersebut. Dari ketiga ukuran pemusatan data tersebut, manakah yang paling sesuai merepresentasikan data tersebut menurut Anda?

Lalu bagamanakah cara menentukan rata-rata, median, dan modus suatu data yang berupa data berkelompok atau bahkan data yang disajikan dalam histogram? Berikut diberikan beberapa contoh data berkelompok sekaligus diberikan ukuran pemusatan datanya.

Contoh Soal 2.11

Data yang disajikan dalam distribusi frekuensi berikut merupakan data usia 50 orang terkaya di Indonesia.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
30 – 34	29,5 – 34,5	5
35 – 39	34,5 – 39,5	10
40 – 44	39,5 – 44,5	7
45 – 49	44,5 – 49,5	20
50 – 54	49,5 – 54,5	8

Tabel 2.6. Distribusi Frekuensi usia 50 orang terkaya

Rata-rata usia 50 orang terkaya di Indonesia berdasarkan distribusi frekuensi di atas adalah 43,6 tahun. Selanjutnya kelas keempat (44,5 – 49,5) merupakan kelas median sekaligus juga merupakan kelas modus dengan mediannya adalah 45,25 dan modusnya adalah 47,1.

Contoh Soal 2.12

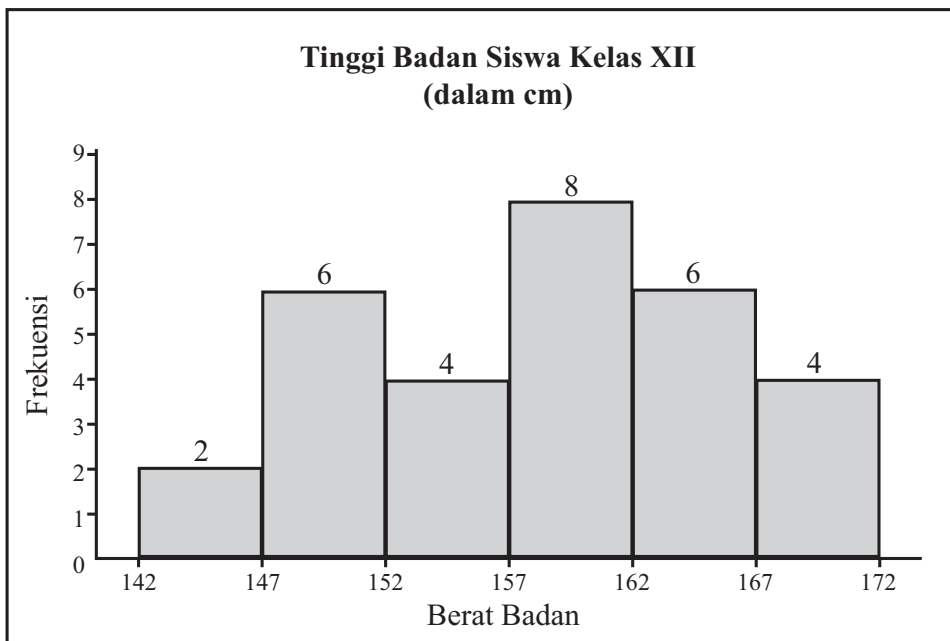
Data skor TOEFL siswa dalam suatu kelas diberikan dalam distribusi frekuensi berikut ini.

Kelas	Batas Kelas	Frekuensi
350 – 374	349,5 – 374,5	4
375 – 399	374,5 – 399,5	3
400 – 424	399,5 – 424,5	5
425 – 449	424,5 – 449,5	6
450 – 474	449,5 – 474,5	7
475 – 499	474,5 – 499,5	3
500 – 524	499,5 – 524,5	2

Tabel 2.7. Distribusi frekuensi skor TOEFL

Berdasarkan distribusi frekuensi di atas, rata-rata skor TOEFL siswa dalam kelas tersebut adalah 433,7. Kelas keempat yaitu 424,5 – 449,5 merupakan kelas median dengan mediannya adalah 437. Kelas kelima merupakan kelas modus dengan modusnya adalah 454,5.

Contoh Soal 2.13

Berikut ini merupakan histogram yang menyajikan data tinggi badan 30 siswa terpilih kelas XII pada suatu sekolah.

Grafik 2.13. Histogram tinggi badan siswa kelas XII

Berdasarkan histogram tersebut, rata-rata tinggi badan siswa tersebut adalah 158,2. Kelas 157 – 162 merupakan kelas median sekaligus kelas modus, dengan median sebesar 158,9 dan modus sebesar 160,3.

Berdasarkan hasil pengamatan yang Anda lakukan, catat istilah-istilah matematika atau informasi-informasi penting mengenai ukuran pemusatan data berkelompok di kotak yang disediakan berikut.

Ayo Menanya

Setelah mengamati Contoh 2.11 – 3.12, coba Anda buat pertanyaan-pertanyaan yang terlintas di benak Anda tentang rata-rata, median, dan modus untuk data berkelompok. Anda juga dapat menghubungkan tentang rata-rata, median, dan modus untuk data tunggal yang sudah Anda pelajari sebelumnya. Dengan membandingkan hasil pengamatan ketiga contoh di atas dengan pengetahuan yang Anda miliki sebelumnya untuk data tunggal memungkinkan Anda untuk mengajukan pertanyaan yang membantu Anda dalam memahami ukuran pemusatan data untuk data berkelompok. Tuliskan minimal 3 pertanyaan Anda dalam kotak yang sudah disediakan di bawah ini.

Ayo Mengumpulkan Informasi dan Menalar

Hal yang perlu Anda ketahui untuk menentukan rata-rata pada data tunggal adalah banyak data yang biasa dilambangkan dengan n dan jumlah keseluruhan dari data tersebut. Jika banyak data yang dihadapi sedikit, tentu Anda dapat dengan mudah untuk menentukan rata-rata. Di lain pihak, jika data yang dihadapi berukuran besar, Anda perlu mengelompokkan data tersebut dalam beberapa kelompok untuk memudahkan mengetahui karakteristik data. Akibatnya, menentukan rata-rata untuk data yang sudah dikelompokkan tersebut berbeda dengan untuk data tunggal. Untuk menambah wawasan Anda mengenai ukuran pemusatan data untuk data berkelompok, Anda perhatikan contoh berikut ini.

Contoh Soal 2.14

Berikut merupakan data usia 80 pengusaha dalam memulai usahanya yang sudah diberikan pada Contoh 2.1.

18	24	19	28	30	19	35	40	23	21
26	34	27	40	38	30	21	24	22	18
32	17	18	21	26	33	35	20	28	27
26	34	31	37	40	17	18	18	20	33
16	20	18	36	35	24	39	19	31	31
26	28	19	35	31	31	28	21	23	26
20	24	24	29	30	30	26	29	28	20
19	28	30	32	38	40	25	25	31	21

Ketika data ini dikelompokkan menjadi 5 kelas maka akan didapatkan distribusi frekuensi seperti di bawah ini.

Kelas	Batas Kelas	Titik Tengah	Frekuensi
16 – 20	15,5 – 20,5	18	19
21 – 25	20,5 – 25,5	23	15
26 – 30	25,5 – 30,5	28	21
31 – 35	30,5 – 35,5	33	16
36 – 40	35,5 – 40,5	38	9

Perhatikan bahwa kelas pertama mempunyai titik tengah 18. Ini artinya bahwa data yang masuk dalam kelas pertama bisa kurang dari 18 atau lebih dari 18. Akibatnya jumlah data pada kelas pertama dapat didekati (aproksimasi) sebesar 342. Jumlah data keseluruhan dengan pendekatan sebesar 2145, sehingga rata-rata untuk data berkelompok di atas adalah 26,8 tahun. Jika Anda hitung rata-rata untuk data tunggal di atas, apa yang Anda peroleh? Bagaimana hasilnya jika Anda bandingkan dengan rata-rata untuk data berkelompok? Tuliskan pada kotak di bawah ini.

Menentukan median dan modus untuk data berkelompok hampir sama dengan menentukan rata-rata, yaitu yang akan ditentukan berupa perkiraan (pendekatan). Berdasarkan frekuensi setiap kelas, Anda dapat menentukan lokasi atau pada selang mana median berada yang disebut dengan kelas median dan juga dapat menentukan kelas modus dengan mempertimbangkan frekuensi setiap kelas. Dengan memperhatikan fakta tersebut, tentukan kelas median dan kelas modus pada distribusi frekuensi di atas. Tuliskan jawaban Anda pada kotak yang disediakan dan tuliskan bagaimana caranya untuk mendapatkan kedua kelas tersebut.

Di lain pihak, jika data dikelompokkan menjadi 7 kelas maka akan didapatkan distribusi frekuensi berikut ini.

Kelas	Batas Kelas	Titik Tengah	Frekuensi
16 – 19			
20 – 23			
24 – 27			
28 – 31			
32 – 35			
36 – 39			
40 – 43			

Dengan melengkapi tabel distribusi frekuensi di atas, coba Anda tentukan perkiraan jumlah data pada setiap kelas sekaligus perkiraan jumlah data keseluruhan. Kemudian dengan mempertimbangkan banyak data, dapatkah Anda memperkirakan rata-rata dari data berkelompok tersebut? Tentukan pula kelas median dan kelas modus. Selanjutnya, dengan data yang sama tetapi distribusi frekuensi yang berbeda apa yang dapat Anda simpulkan mengenai rata-rata, kelas median, dan kelas modus dari kedua distribusi frekuensi di atas?

Tuliskan jawaban Anda pada kotak berikut ini.

Ukuran pemusatan data (rata-rata, median, modus) untuk data berkelompok secara prinsip sama dengan ukuran pemusatan data untuk data tunggal. Dari langkah-langkah pengamatan dan penggalian informasi mungkin Anda sudah tahu perbedaan ukuran pemusatan data untuk data tunggal dan data berkelompok. Ukuran pemusatan untuk data tunggal dapat ditentukan dengan pasti, tetapi ukuran pemusatan untuk data berkelompok ditentukan dengan perkiraan atau pendekatan.

Untuk mengetahui lebih lanjut bagaimana cara menentukan ukuran pemusatan untuk data berkelompok, lakukan beberapa kegiatan berikut ini.

2.2.1.1 Rata-rata

Berikut ini diberikan distribusi frekuensi pada Contoh 2.11. Lengkapi tabel berikut ini untuk menentukan rata-rata usia 50 orang terkaya di Indonesia.

Kelas	Batas Kelas	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$x_i \cdot f_i$
30 – 34	29,5 – 34,5		5	
35 – 39	34,5 – 39,5		10	
40 – 44	39,5 – 44,5		7	
45 – 49	44,5 – 49,5		20	
50 – 54	49,5 – 54,5		8	
Total				

Telah diketahui sebelumnya bahwa rata-rata usia 50 orang terkaya di Indonesia adalah 43,6 tahun. Dengan mengamati tabel di atas, bagaimana caranya bisa didapatkan hasil 43,6? Tuliskan rumus untuk menentukan rata-rata data berkelompok menurut Anda dalam kotak yang tersedia di bawah ini.

2.2.1.2 Median

Lengkapi tabel berikut ini untuk mengetahui lebih lanjut cara menentukan median data berkelompok. Distribusi frekuensi yang digunakan adalah distribusi frekuensi pada Contoh 2.11.

Kelas	Batas Kelas	Batas Bawah (L_i)	Panjang Kelas (p)	Frekuensi (f_i)	F_i	$\frac{\frac{1}{2}n - F_i}{f_i}$	$L_i + p\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_i}{f_i}\right)$
30 – 34	29,5 – 34,5			5	0		
35 – 39	34,5 – 39,5			10	5		
40 – 44	39,5 – 44,5			7			
45 – 49	44,5 – 49,5			20			
50 – 54	49,5 – 54,5			8			

Keterangan:

F_i : jumlah frekuensi kelas-kelas sebelum kelas ke-i.

n : banyak data

Telah diketahui sebelumnya bahwa median dari distribusi frekuensi tersebut adalah 45,25. Berdasarkan tabel yang sudah dilengkapi di atas, bagaimana menurut Anda cara menentukan median? Kelas manakah yang

digunakan sebagai median? Mengapa? Tuliskan jawaban Anda termasuk rumus median di kotak yang sudah disediakan.

2.1.3 Modus

Lengkapi tabel berikut untuk mengetahui cara menentukan modus data berkelompok.

Kelas	Batas Kelas	Batas Bawah (L_i)	Panjang Kelas (p)	Frekuensi (f_i)	d_1	d_2	$L_i + p(\frac{d_1}{d_1 + d_2})$
30 – 34	29,5 – 34,5			5	0		
35 – 39	34,5 – 39,5			10	5		
40 – 44	39,5 – 44,5			7		12	
45 – 49	44,5 – 49,5			20		0	
50 – 54	49,5 – 54,5			8			

Keterangan:

d_1 : selisih frekuensi kelas ke-i dengan kelas sebelumnya

d_2 : selisih frekuensi kelas ke-i dengan kelas berikutnya

Telah diketahui sebelumnya bahwa modus usia 50 orang terkaya di Indonesia adalah 47,1 tahun. Berdasarkan tabel yang sudah dilengkapi di atas, kelas manakah yang sesuai dengan hasil tersebut? Dapatkah Anda simpulkan bagaimana menentukan modus data berkelompok sekaligus dengan rumusnya? Tuliskan jawaban Anda dalam kotak berikut ini.

Dari rumus rata-rata, median, dan modus yang telah Anda dapatkan, coba Anda cek kebenaran rumus tersebut dengan menggunakannya pada Contoh 2.12 dan Contoh 2.13.

Sedikit Informasi

Ukuran pemusatan atau ukuran penyebaran suatu data yang diperoleh dari populasi disebut dengan parameter, sedangkan jika datanya berasal dari sampel maka disebut dengan statistik. Sehingga rata-rata suatu data yang diperoleh dari suatu populasi merupakan parameter dan dilambangkan dengan . Rata-rata suatu data yang diperoleh dari sampel yang mewakili populasi merupakan statistik yang dilambangkan dengan $\overline{x}$.

Sebagian orang mungkin mempunyai kesalahpahaman mengenai rata-rata. Jika ada yang mengatakan ”rata-rata gaji buruh di Indonesia adalah Rp2.500.000,00” maka sebenarnya kita tidak bisa langsung mengetahui bahwa rata-rata yang digunakan adalah rata-rata hitung seperti yang kita tentukan rumusnya sebelumnya. Rata-rata mempunyai banyak jenis, di antaranya adalah rata-rata hitung, rata-rata geometri, dan rata-rata harmonik yang besarannya dimungkinkan tidak sama antar rata-rata tersebut.

Anda diskusikan hasil yang Anda dapatkan dengan teman sebangku Anda. Guru Anda akan menunjuk beberapa siswa untuk menuliskan hasil yang diperoleh di papan tulis. Diskusikan hasil tersebut dengan teman sekelas Anda untuk mendapatkan kesimpulan kelas. Tuliskan kesimpulan Anda dikotak yang sudah disediakan dibawah ini.

Kegiatan 2.2.2 Ukuran Penyebaran Data Berkelompok

Mengetahui hanya rata-rata dari suatu data tidak cukup untuk mendeskripsikan data sepenuhnya. Anda juga perlu mengetahui bagaimana penyebaran data. Sebagai contoh, seorang penjual sepatu olah raga di suatu daerah telah mengetahui bahwa rata-rata ukuran sepatu olah raga yang laris adalah ukuran 40. Penjual sepatu tersebut tidak akan bertahan lama dalam penjualan sepatu olah raga ini jika dia menjual sepatu hanya ukuran 40. Walaupun dia mengetahui rata-rata ukuran sepatu pembeli di daerah tersebut, dia juga perlu mengetahui bagaiamana data menyebar, yaitu apakah datanya mendekati rata-rata ataukah menyebar merata. Ukuran yang menentukan penyebaran data disebut dengan ukuran penyebaran data. Untuk data berkelompok, ukuran penyebaran data meliputi simpangan rata-rata, simpangan baku, dan ragam.

Anda mungkin masih ingat bagaimana menentukan simpangan rata-rata, simpangan baku, dan ragam untuk data tunggal. Secara prinsip cara menentukan simpangan rata-rata, simpangan baku, dan ragam untuk data tunggal hampir sama dengan untuk data berkelompok. Berikut akan diberikan beberapa contoh distribusi frekuensi suatu populasi disertai dengan simpangan rata-rata, simpangan baku, dan ragam.

Contoh Soal 2.15

Data yang disajikan berikut merupakan data pendapatan netto 45 perusahaan besar di Indonesia dalam milyar rupiah.

Kelas	Frekuensi
10 – 20	2
21 – 31	8
32 – 42	15
43 – 53	7
54 – 64	10
65 – 75	3

Ukuran penyebaran pada data berkelompok di atas dapat dihitung, yaitu simpangan rata-rata adalah 12,4 dan simpangan bakunya adalah 14,6. Selanjutnya ragam dari data ini adalah 212,3.

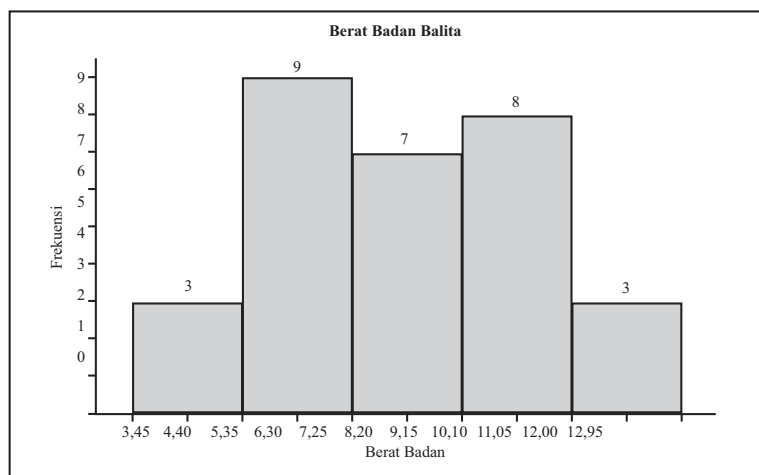
Contoh Soal 2.16

Tiga puluh sepeda motor terpilih dites untuk mengetahui efisiensi bahan bakar dalam kilometer per liter. Distribrusi frekuensi yang didapatkan disajikan berikut ini.

Kelas	Frekuensi
7,5 – 12,5	3
12,5 – 17,5	5
17,5 – 22.5	15
22,5 – 27,5	5
27,5 – 32,5	2

Dari distribusi di atas didapatkan simpangan rata-rata 3,5, simpangan baku sebesar 5,1 dan ragam sebesar 25,7

Di bawah ini diberikan histogram pada Contoh 2.10 yang menyajikan berat badan 30 balita (dalam kilogram) yang datang pada posyandu di suatu daerah.

Contoh Soal 2.17

Berdasarkan histogram tersebut dapat ditentukan ukuran penyebaran datanya, yaitu simpangan rata-rata sebesar 1,85, simpangan baku sebesar 2,26 dan ragam sebesar 5,09.

Informasi-informasi atau istilah matematika penting dari hasil pengamatan mengenai ukuran penyebaran data berkelompok dapat dituliskan dalam kotak yang disediakan berikut.

Berdasarkan pengamatan Anda terhadap ketiga contoh yang diberikan sebelumnya, buatlah beberapa pertanyaan tentang ukuran penyebaran data berkelompok. Tuliskan pertanyaan Anda dalam kotak yang tersedia di bawah ini.

Mengetahui ukuran pemusatan data seperti rata-rata, median atau modus saja tidak cukup bagi seorang peneliti untuk mendeskripsikan data lebih rinci. Seorang peneliti tentu memerlukan informasi bagaimana data menyebar, yaitu bagaimana kondisi data dibandingkan dengan rata-rata yang diperoleh. Informasi mengenai apakah semua data dekat dengan rata-rata atau bahkan datanya jauh dari rata-rata (menyebar secara merata) sangat dibutuhkan oleh penggunan data dalam penarikan kesimpulan.

Pada pengamatan sebelumnya diberikan beberapa contoh distribusi frekuensi yang disertai dengan ukuran penyebarannya. Berikut ini diberikan contoh lainnya yang dapat Anda gunakan untuk lebih memahami ukuran penyebaran data dan bagaimana menentukannya.

Contoh Soal 2.18

Berikut ini merupakan distribusi frekuensi dari nilai ujian akhir 100 mahasiswa jurusan matematika yang terpilih di suatu universitas.

Kelas	Frekuensi
66 – 72	6
73 – 79	18
80 – 86	39
87 – 93	28
94 – 100	9

Dengan menggunakan pengetahuan sebelumnya bahwa penyebaran data dibandingkan dengan rata-rata, coba Anda tentukan rata-rata dari distribusi frekuensi di atas dan tuliskan hasilnya dalam kotak di bawah ini.

Rata-rata suatu data berkelompok ditentukan dengan memperhatikan titik tengah setiap kelas dan frekuensinya masing-masing. Simpangan rata-rata memperhatikan bagaiamana data menyimpang dari rata-rata. Berdasarkan hal tersebut, coba Anda buat kolom tambahan dari distribusi frekuensi di atas yang berisikan selisih titik tengah tiap kelas dengan rata-rata. Selanjutnya perhatikan hasil selisih tersebut. Sebagai ilustrasi, selisih titik tengah kelas pertama dengan rata-rata adalah 2, ini berarti setiap datum pada kelas tersebut diasumsikan mempunyai selisih 2 dengan rata-rata. Akibatnya banyak datum dalam kelas tersebut (frekuensi) juga menentukan simpangan datum dalam suatu data terhadap rata-ratanya.

Berdasarkan proses tersebut, dapatkah Anda menduga bagaimana cara menentukan simpangan rata-rata? Tuliskan dugaan Anda dalam kotak di bawah ini.

Ukuran penyebaran berupa ragam dan simpangan baku prinsipnya sama dengan simpangan rata-rata yaitu memperhatikan selisih rata-rata dengan titik tengah tiap kelas. Jika Anda perhatikan dari ketiga contoh pada pengamatan, apa yang dapat Anda simpulkan mengenai hubungan antara ragam dan simpangan baku? Coba diskusikan dengan teman sebangku Anda tentang hubungan simpangan baku dan ragam. Dengan hubungan yang ditemukan tersebut maka memudahkan Anda dalam menentukan keduanya. Simpangan baku dapat ditentukan dengan mudah jika ragam ditemukan dan sebaliknya juga berlaku. Karena ukuran penyebaran pada data berkelompok prinsipnya mirip dengan untuk data tunggal, coba Anda tuliskan dalam kotak di bawah ini bagaimana cara menentukan ragam dan simpangan baku untuk data tunggal.

2.2.2.1 Simpangan Rata-rata

Dengan menggunakan distribusi frekuensi pada Contoh 2.15, coba lengkapi tabel di bawah ini untuk mengetahui cara menentukan simpangan rata-rata.

Kelas	Frekuensi	Titik tengah	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
10 – 20	2				
21 – 31	8				
32 – 42	15				
43 – 53	7				
54 – 64	10				
65 – 75	3				
Total					

Keterangan:

$\bar{x}$: rata-rata

Untuk mendapatkan hasil simpangan rata-rata 12,4, kolom atau sel mana saja yang digunakan? Setelah mendapatkan dugaan rumus simpangan rata-rata, buatlah tabel yang sama dengan di atas untuk Contoh 2.16 dan Contoh 2.17. Tentukan simpangan rata-rata dari tabel yang Anda buat untuk Contoh 2.16 dan Contoh 2.17 dan cocokkan hasil yang Anda dapatkan dengan hasil pada kedua contoh tersebut. Tuliskan hasil dugaan rumus simpangan rata-rata untuk data berkelompok dalam kotak di bawah ini.

2.2.2.2 Simpangan Baku dan Ragam

Anda sudah mempelajari sebelumnya mengenai hubungan simpangan baku dan ragam sehingga penentuan salah satu statistik akan menghasilkan pula statistik satunya. Lengkapi tabel berikut ini untuk mengetahui lebih lanjut rumus simpangan baku dan ragam. Distribusi frekuensi yang digunakan adalah distribusi frekuensi pada Contoh 2.15.

Kelas	Frekuensi (f_i)	Titik tengah (x_i)	$f_i \cdot x_i$	x_i^2	$f_i \cdot x_i^2$
10 – 20	2				
21 – 31	8				
32 – 42	15				
43 – 53	7				
54 – 64	10				
65 – 75	3				
Total					

Berdasarkan tabel di atas, hitunglah berikut ini.

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i - \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{n^2} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2}{n^2} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2}{n(n-1)} =$$

$$\frac{n\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2}{n(n-1)} =$$

$$\frac{n\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2}{n^2} =$$

Berdasarkan beberapa rumus tersebut, manakah yang sesuai dengan hasil pada Contoh 2.15? Jika Anda sudah mempunyai dugaan rumus untuk ragam, maka buatlah dugaan rumus untuk simpangan baku. Tuliskan pengertian ragam dan simpangan baku sekaligus rumusnya di bawah ini.

Untuk mengecek kebenaran dugaan Anda tentang ragam dan simpangan baku, buatlah tabel yang sama dengan di atas untuk Contoh 2.16 dan Contoh 2.17. Kemudian cocokkan hasil yang Anda dapatkan dengan hasil pada kedua contoh tersebut.

Ayo Mengomunikasikan

Diskusikan ukuran penyebaran data berkelompok yang Anda dapatkan dengan teman sebangku Anda. Diskusikan pula hasilnya dengan teman sekelas Anda untuk mendapatkan kesimpulan kelas. Diskusi dan berpendapat yang santun untuk mendapatkan hasil yang maksimal. Tuliskan kesimpulan Anda pada kotak di bawah ini.

Masalah 2.2

1. Berikut merupakan data jumlah protein yang terkandung dalam beberapa macam makanan cepat saji yang terpilih.

23	30	20	27	44	26	35	20	29	29
25	15	18	27	19	22	12	26	34	15
27	35	26	43	35	14	24	12	23	31
40	35	38	57	22	42	24	21	27	33

   a. Hitunglah rata-rata, median, dan modus dari data tersebut.
   b. Buatlah distribusi frekuensi data tersebut dengan 5 kelas.
   c. Hitung rata-rata, median, dan modus dari data yang sudah dikelompokkan pada poin (b)
   d. Bandingkan ukuran pemusatan pada poin (a) dan (c). Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai hasil tersebut?

2. Berikut merupakan distribusi frekuensi persentase penduduk usia di bawah 25 tahun yang menyelesaikan studi sarjananya selama 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia. Tentukan ukuran pemusatan data berkelompok tersebut.

Persentase	Frekuensi
15,2 – 19,6	3
19,7 – 24,1	15
24,2 – 28,6	19
28,7 – 33,1	6
33,2 – 37,6	7
37,7 – 42,1	0
42,2 – 46,6	1

3. Jelaskan ukuran pemusatan apa yang digunakan (rata-rata, median, modus) untuk situasi di bawah ini.

   a. Setengah dari jumlah pekerja di suatu pabrik dapat memperoleh lebih dari Rp20.000,00 per jam dan setengahnya yang lain memperoleh kurang dari Rp20.000,00 per jam.
   b. Rata-rata jumlah anak dalam suatu keluarga di suatu kompleks perumahan adalah 1,8.
   c. Sebagian besar orang lebih memilih mobil warna hitam dibandingkan dengan warna-warna lainnya.
   d. Ketakutan yang paling umum terjadi saat ini adalah ketakutan berbicara di depan umum.
   e. Rata-rata usia dosen perguruan tinggi adalah 42,3 tahun.

4. Delapan puluh baterai merk tertentu dipilih secara acak untuk dievaluasi daya hidup baterai dalam jam. Distribusi frekuensi yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Persentase	Frekuensi
62,5 – 73,5	5
73,5 – 84,5	14
84,5 – 95,5	18
95,5 – 106,5	25
106,5 – 117,5	12
117,5 – 128,5	6

   a. Tentukan simpangan rata-rata, simpangan baku dan ragam
   b. Dapatkah disimpulkan bahwa daya hidup baterai merk tertentu tersebut konsisten? Jelaskan.

5. Distribusi frekuensi di bawah ini merupakan persentase siswa sekolah dasar kelas 2 yang mempunyai kemampuan baca dan kemampuan matematika di atas batas yang sudah ditentukan di 50 kota besar di Indonesia. Tentukan ukuran penyebaran dari kedua disribusi frekuensi berikut dan bandingkan hasilnya.

Persentase	Frekuensi Kemampuan Baca	Frekuensi Kemampuan Matematika
17,5 – 22,5	7	5
22,5 – 27,5	6	9
27,5 – 32,5	14	11
32,5 – 37,5	19	16
37,5 – 42,5	3	8
42,5 – 47,5	1	1

Uji Kompetensi

1. Berikut merupakan daftar berat badan 50 pemain top NBA dalam pound. Buat distribusi frekuensi dengan 8 kelas. Analisis hasil distribusi frekuensi mengenai nilai-nilai ekstrim, kelas terbanyak, kelas dengan frekuensi paling sedikit, dan sebagainya. (1 pound = 0,453 kg).

240	210	220	260	250	195	230	270	325	225
165	295	205	230	250	210	220	210	230	202
250	265	230	210	240	245	225	180	175	215
215	235	245	250	215	210	195	240	240	225
260	210	190	260	230	190	210	230	185	260

2. Buat distribusi frekuensi dengan 7 kelas untuk data nilai tes TOEFL siswa kelas bahasa suatu sekolah yang diberikan berikut ini. Kemudian jawab pertanyaan-pertanyaan berikutnya.

350	540	495	455	400	520	513	485
460	505	375	380	550	475	450	390
495	470	510	465	398	497	450	440
395	465	470	440	520	492	524	380
390	425	475	435	550	545	445	458

   a. Untuk kelas dengan frekuensi terbanyak, tentukan persentase frekuensinya terhadap jumlah keseluruhan siswa.
   b. Untuk kelas dengan frekuensi paling sedikit, tentukan persentase frekuensinya terhadap jumlah keseluruhan siswa.
   c. Lanjutkan langkah ini untuk kelas lainnya. Buat kolom tambahan di sebelah kanan berisikan persentase setiap kelasnya.
   d. Ceritakan hasil distribusi frekuensi yang diperoleh

   Distribusi frekuensi yang Anda dapatkan disebut dengan distribusi frekuensi relatif.

3. Seratus pendaftar seleksi masuk perguruan tinggi di suatu universitas dipilih secara acak sehingga didapatkan distribusi frekuensi nilai tes berikut ini. Buatlah histogram, poligon frekuensi, dan ogive untuk distribusi frekuensi ini.

Kelas	Frekuensi
90 – 98	6
99 – 107	20
108 – 116	40
117 – 125	26
126 – 134	8

Pendaftar yang nilainya di atas 107 tidak perlu ikut dalam program matrikulasi. Dalam kelompok ini ada berapa pendaftar yang tidak perlu ikut dalam program matrikulasi?

4. Beberapa kota besar di Indonesia yang terpilih diuji kualitas udaranya dari polusi. Berikut merupakan data jumlah hari di mana kota-kota tersebut dideteksi mempunyai kualitas udara yang buruk pada tahun 2010 dan 2015. Buatlah distribusi frekuensi dan histogram untuk masing-masing tahun dan bandingkan hasilnya.

2010						2015					
43	76	51	14	0	10	10	11	14	20	15	6
20	0	5	17	67	25	17	0	5	19	127	4
38	0	56	8	0	9	31	5	88	1	1	16
14	5	37	14	95	20	14	19	20	9	138	22
23	12	33	0	3	45	13	10	20	20	20	12

5. Jumlah protein dalam beberapa macam makanan cepat saji diberikan di bawah ini. Buatlah distribusi frekuensi dengan 6 kelas kemudian sajikan dalam histogram, poligon frekuensi, dan ogive. Deskripsikan histogram yang diperoleh.

23	30	20	27	44	26	35	20	29	29
25	15	18	27	19	22	12	26	34	15
27	35	26	43	35	14	24	12	23	31
40	35	38	57	22	42	24	21	27	33

6. Diberikan distribusi frekuensi untuk jumlah komisi (dalam puluhan ribu) yang diterima 100 salesman yang dipekerjakan di beberapa cabang perusahaan besar. Tentukan rata-rata, median, dan modus untuk distribusi frekuensi ini.

Persentase	Frekuensi
150 – 158	5
159 – 167	16
168 – 176	20
177 – 185	21
186 – 194	20
195 – 203	15
204 – 212	3

7. Pengelola restoran cepat saji di suatu kota besar menyatakan bahwa rata-rata gaji karyawannya adalah Rp18.000,00 per jam. Seorang karyawannya menyatakan bahwa kebanyakan karyawan di restoran tersebut menerima gaji minimal. Jika kedua orang tersebut jujur atas pernyataannya, jelaskan bagaimana ini bisa terjadi.

8. Distribusi frekuensi di bawah ini menyajikan persentase penduduk usia di bawah 25 tahun yang menyelesaikan studi sarjana tepat 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia. Tentukan ukuran penyebaran dari distribusi frekuensi tersebut.

Persentase	Frekuensi
15,2 – 19,6	3
19,7 – 24,1	15
24,2 – 28,6	19
28,7 – 33,1	6
33,2 – 37,6	7
37,7 – 42,1	0
42,2 – 46,6	1

9. Dua puluh pelari dipilih secara acak untuk dilihat jumlah kilometer pelari tersebut lari dalam seminggu. Berikut merupakan distribusi frekuensi yang dihasilkan.

Batas Kelas	Frekuensi
5,5 – 10,5	1
10,5 – 15,5	2
15,5 – 20,5	3
20,5 – 25,5	5
25,5 – 30,5	4
30,5 – 35,5	3
35,5 – 40,5	2

a. Tentukan ukuran pemusatan distribusi frekuensi di atas
b. Tentukan ukuran penyebarannya
c. Deskripsikan perilaku data tersebut terhadap rata-rata berdasarkan ukuran penyebarannya.

10. Berikut merupakan distribusi frekuensi kumulatif data suhu udara tertinggi (dalam derajat Fahrenheit) yang tercatat di 50 kota besar di Indonesia. Tentukan simpangan rata-rata, simpangan baku, dan ragam.

	Frekuensi Kumulatif
Kurang dari 99,5	0
Kurang dari 104,5	2
Kurang dari 109,5	10
Kurang dari 114,5	28
Kurang dari 119,5	41
Kurang dari 124,5	48
Kurang dari 129,5	49
Kurang dari 134,5	50

Peluang

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
3.3 Menganalisis aturan pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi) melalui masalah kontekstual. 3.4 Mendeskripsikan dan menentukan peluang kejadian majemuk (peluang kejadian-kejadian saling bebas, saling lepas, dan kejadian bersyarat) dari suatu percobaan acak. 4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan kaidah pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi). 4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kejadian majemuk (peluang kejadian-kejadian saling bebas, saling lepas, dan kejadian bersyarat).	Melalui pembelajaran kombinatorik, siswa memperoleh pengalaman belajar 1. Mengamati dan menemukan konsep aturan penjumlahan dan perkalian melalui masalah kontekstual 2. Mengamati dan menemukan konsep permutasi dan kombinasi melalui masalah kontekstual 3. Menerapkan konsep aturan penjumlahan, perkalian, permutasi, dan kombinasi dalam menyelesaikan masalah sehari-hari

Istilah Penting

- *Aturan Perkalian*
- *Permutasi*
- *Kombinasi*
- *Peluang Kejadian*

Biografi Gerolamo Cardano

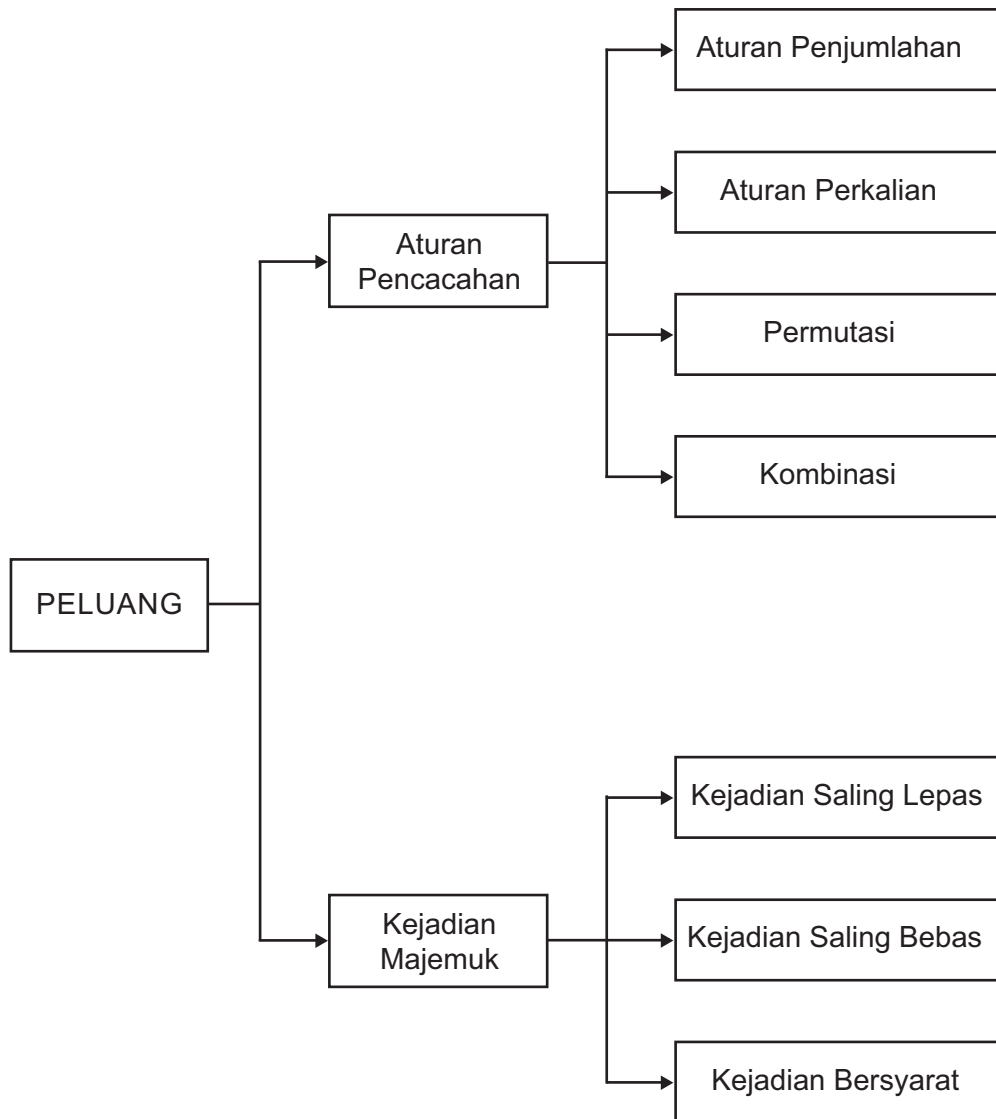
Gerolamo Cardano
(1501–1576)

Gerolamo Cardano lahir pada tanggal 24 September 1501 di Pavia, Lombardy, Italia. Beliau merupakan seorang ahli matematika, dokter, ahli biologi, fisika, kimia, astrolog, astronom, filosofi, penulis, dan penjudi dari Italia. Beliau sering dianggap sebagai ahli matematika terbesar dari Renaissance.

Meskipun kegiatannya berjudi membawa pengaruh buruk bagi keluarganya, namun judi juga memacu Gerolamo Cardano untuk mempelajari peluang dalam kegiatan tersebut. Penelitian tentang putaran dadu, didasarkan pada premis bahwa terkandung prinsip-prinsip dasar sains, bukan sekedar keberuntungan. Teori ini dituliskan dalam bukunya yang berjudul *Liber de Ludo Aleae* (*Book on Games of Changes*) pada tahun 1565. Beliau juga berjasa dalam memperkenalkan koefisien binomial dan teorema binomial, yang ia publikasikan dalam bukunya *Opus novum de proportionibus*.

Pelajaran berharga dari Gerolamo Cardano:

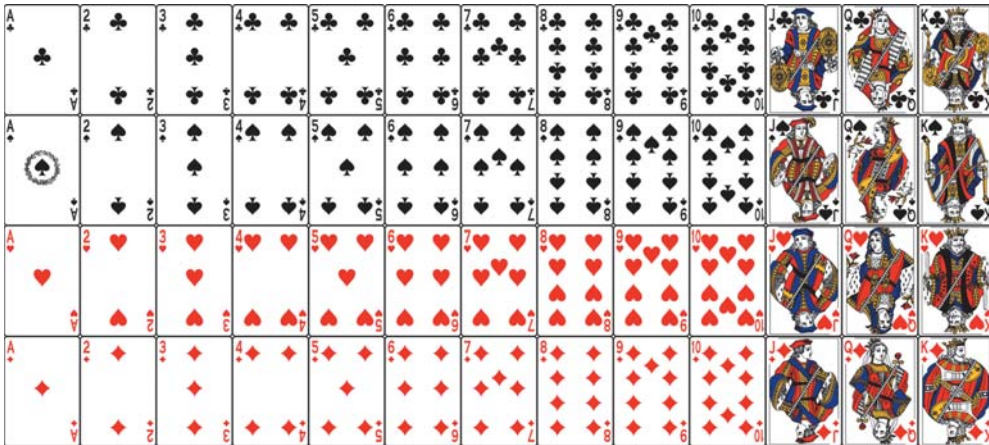
1. Segala perbuatan yang kita lakukan, meskipun perbuatan yang buruk akan menghasilkan hal yang positif dan bermanfaat.
2. Memiliki pendirian yang kuat dalam ilmu yang diminati.
3. Memiliki rasa ingin tahu yang tinggi sehingga dapat menggunakan kegiatan yang dilakukan untuk memahami konsep-konsep ilmu.

B. Diagram Alur Konsep

C. Materi Pembelajaran

Subbab 3.1 Aturan Pencacahan, Permutasi, dan Kombinasi

Kegiatan 3.1.1 Aturan Penjumlahan dan Perkalian

Pernahkah Anda bermain kartu remi seperti gambar di bawah?

Sumber: *http://magazinesofthebeginer.blogspot.co.id/2011/03*

Gambar 3.1.1

Jenis kartu pada pada baris pertama disebut Club (C) (♣), baris kedua disebut Spade (S)(♠), baris ketiga disebut Heart (H) (♥), dan baris terakhir disebut Diamond (D) (♦).

Dalam satu jenis terdapat 13 kartu (Ace (A), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Jack (J), Queen (Q), King (K)) sehingga totalnya menjadi 52 kartu.

Dalam kesempatan ini, kita bukannya akan bermain kartu remi, melainkan akan menggunakan media kartu remi ini untuk belajar tentang aturan penjumlahan dan perkalian.

Dengan menggunakan kartu-kartu remi di atas, amati kegiatan pengambilan kartu beserta banyak cara pengambilannya seperti pada Tabel 3.1.1 berikut.

Tabel 3.1.1. Kegiatan Pengambilan Kartu Remi dan Banyak Caranya

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
1.	Mengambil satu kartu Ace (A)	A-C, A-S, A-H, A-D	4
2.	Mengambil satu kartu Queen	Q-C, Q-S, Q-H, Q-D	4
3.	Mengambil satu kartu Heart	A-H, 2-H, 3-H, 4-H, 5-H, 6-H, 7-H, 8-H, 9-H, 10-H, J-H, Q-H, K-H,	13
4.	Mengambil satu kartu Ace hitam	A-C, A-S	2

Selanjutnya, Anda diminta untuk melengkapi kegiatan-kegiatan berikut beserta banyak cara pengambilannya seperti pada Tabel 3.1.2 dan Tabel 3.1.3 berikut.

Tabel 3.1.2. Kegiatan Pengambilan Kartu Remi dan Banyak Caranya

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
5.	Mengambil satu kartu Ace atau Queen	A-C, A-S, A-H, A-D, Q-C, Q-S, Q-H, Q-D	8
6.	Mengambil satu kartu Ace atau satu kartu Heart	A-C, A-S, A-H, A-D, 2-H, 3-H, 4-H, 5-H, 6-H, 7-H, 8-H, 9-H, 10-H, J-H, Q-H, K-H	16
7.	Mengambil satu kartu Ace atau satu kartu Ace hitam		
8.	Mengambil satu kartu Queen atau satu kartu Heart		

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
9.	Mengambil satu kartu Queen atau satu kartu Ace hitam		
10.	Mengambil satu kartu Ace Hitam atau King		

Sekarang Anda diminta untuk melengkapi dua kegiatan pengambilan kartu beserta banyak cara pengambilannya.

Tabel 3.1.3. Kegiatan Pegambilan Kartu Remi dan Banyak Caranya

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
11.	Banyak cara mengambil satu kartu Ace (tanpa dikembalikan) kemudian satu kartu Queen	A-C Q-C Q-S Q-H Q-D A-S Q-C Q-S Q-H Q-D A-H Q-C Q-S Q-H Q-D A-D Q-C Q-S Q-H Q-D	16
12.	Banyak cara mengambil kartu Ace (tanpa dikembalikan) kemudian satu kartu Heart		

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
13.	Banyak cara mengambil kartu Club bernomor ganjil (tanpa dikembalikan) kemudian Club bernomor prima		

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Setelah Anda mengamati kegiatan pengambilan kartu beserta banyak cara pengambilannya, tentu Anda akan bertanya tentang hal-hal yang berkenaan dengan kegiatan itu. Misalnya apakah ada aturan untuk menghitungnya. Nah, sekarang buatlah pertanyaan-pertanyaan yang berkenaan dengan kegiatan tersebut? Berikut beberapa contoh pertanyaan:

1. Bagaimana hubungan masing-masing kejadian?
2. Apakah ada aturan yang berhubungan dengan kejadian-kejadian di atas?
3. Apakah ada cara lain untuk menyajikan cara menghitung kemungkinan banyak cara pengambilan?

Tuliskan beberapa pertanyaan Anda pada kotak berikut.

Coba Anda perhatikan kegiatan nomor 1 sampai dengan nomor 6. Kemungkinan pengambilan kartu pada kegiatan nomor 1 tidak ada yang sama dengan kemungkinan pada kegiatan nomor 2. Hal ini tidak terjadi pada kemungkinan pengambilan kartu pada kegiatan nomor 1 dan nomor 3. Kedua kegiatan ini mempunyai kemungkinan yang sama, yaitu Ace-H. Dua kegiatan pengambilan pada nomor 1 dan nomor 3 merupakan contoh dua kegiatan yang *saling lepas* karena kegiatan ini tidak pernah terjadi bersama-sama. Sedangkan kegiatan pengambilan pada nomor 1 dan nomor 3 merupakan contoh kegiatan yang *tidak saling lepas*. Dengan penjelasan ini, Anda tentu dapat menentukan hubungan beberapa pasangan pada kegiatan-kegiatan nomor 1 sampai dengan nomor 6 dalam tabel berikut.

Kegiatan	Hubungan	Kemungkinan yang Sama
Nomor 1 dan 2	Saling lepas	-
Nomor 1 dan 3	Tidak saling lepas	A-H
Nomor 1 dan 4		
Nomor 2 dan 3		
Nomor 2 dan 4		
Nomor 3 dan 4		

Dengan memperhatikan hubungan-hubungan di atas, maka kegiatan-kegiatan pada nomor 5 sampai dengan 10 dapat disajikan seperti pada tabel berikut.

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
5.	Mengambil satu kartu Ace (kegiatan nomor 1) atau Queen (kegiatan nomor 2)	Saling lepas	8 = 4 (banyak cara kegiatan nomor 1) + 4 (banyak cara kegiatan nomor 2)

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
6.	Mengambil satu kartu Ace (kegiatan nomor 1) atau satu kartu Heart (kegiatan nomor 3)	Tidak saling lepas	$16 \neq 4$ (banyak cara kegiatan nomor 1) + 13 (kegiatan nomor 3)
7.	Mengambil satu kartu Ace (kegiatan nomor 1) atau satu kartu Ace hitam (kegiatan nomor 4)		
8.	Mengambil satu kartu Queen (kegiatan nomor 2) atau satu kartu Heart (kegiatan nomor 3)		
9.	Mengambil satu kartu Queen (kegiatan nomor 2) atau satu kartu Ace hitam (kegiatan nomor 4)		
10.	Mengambil satu kartu Heart (kegiatan nomor 3) atau satu kartu Ace Hitam (kegiatan nomor 4)		

Demikian juga dengan memperhatikan hubungan kegiatan-kegiatan pada nomor 1 sampai dengan nomor 6, maka kegiatan-kegiatan pada nomor 11 sampai dengan nomor 13 dapat disajikan seperti tabel berikut.

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
11.	Banyak cara mengambil satu kartu Ace (kegiatan nomor 1) (tanpa dikembalikan) kemudian satu kartu Queen (kegiatan nomor 2)	Saling lepas	$16 = 4$ (banyak cara kegiatan nomor 1) x 4 banyak cara kegiatan nomor 2)

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
12.	Banyak cara mengambil kartu Ace (kegiatan nomor 1) (tanpa dikembalikan) kemudian satu kartu Heart (kegiatan nomor 3)	Tidak saling lepas	
13.	Banyak cara mengambil kartu Club bernomor ganjil (tanpa dikembalikan) kemudian Club bernomor prima		

Nah sekarang Anda dapat menyimpulkan sebagai berikut.

1. Apabila kegiatan 1 dan kegiatan 2 adalah dua kegiatan yang saling lepas, dan misalkan kegiatan 1 terjadi dengan n cara dan kegiatan 2 terjadi dengan m cara, maka 2 kegiatan tersebut akan terjadi sebanyak $m + n$. Aturan ini disebut dengan *aturan penjumlahan*.
2. Apabila kegiatan nomor 1 dan kegiatan nomor 3 adalah dua kegiatan yang tidak saling lepas, dan misalkan kegiatan nomor 1 terjadi dengan n cara dan kegiatan nomor 3 terjadi dengan m cara, maka kegiatan yang diperoleh dari melakukan kegiatan nomor 1 kemudian dilanjutkan dengan kegiatan nomor 3 akan terjadi sebanyak mn. Aturan ini disebut dengan *aturan perkalian*.

Aturan penjumlahan dan perkalian ini dapat diperluas sebanyak n kegiatan yang saling lepas. Tuliskan aturan penjumlahan dan perkalian yang diperluas dalam tempat yang disediakan berikut.

Perluasan Aturan Penjumlahan

Perluasan Aturan Perkalian

Setelah Anda memperoleh aturan dalam perhitungan, yaitu aturan penjumlahan dan peraturan perkalian, sekarang Anda berdiskusi dengan teman sebangku untuk membuat minimal 4 pasang kejadian yang saling lepas untuk menerapkan aturan tersebut. Mintalah bantuan guru apabila Anda menemui kesulitan.

Setelah kelompok Anda selesai membuat soal tersebut, selanjutnya saling bertukar soal dengan kelompok lain dan kemudian kerjakan soal tersebut. Mintalah kelompok yang memberi soal untuk mengoreksi pekerjaan kelompok Anda.

Kegiatan 3.1.2 Penyusunan dan Pengambilan

Dalam kehidupan sehari-hari, tentu istilah penyusunan dan pengambilan adalah dua kegiatan yang berbeda. Sebagai contoh, apabila Anda mempunyai empat kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D), kemudian diminta untuk menyusun kartu Ace tersebut dua-dua, maka tentu akan berbeda apabila Anda diminta mengambil dua kartu dari empat kartu Ace tersebut. Untuk lebih jelasnya perbedaan dua kegiatan tersebut, maka lakukan kegiatan berikut. Silakan Anda melakukan kegiatan ini secara berkelompok 3–4 orang.

Dengan menggunakan media kartu remi (jika diperlukan), Anda diminta untuk melakukan kegiatan penyusunan atau pengambilan kartu (tanpa pengembalian) dan kemudian menuliskan hasilnya seperti pada tabel berikut.

Tabel 3.1.4 Kegiatan Penyusunan dan Pengambilan Kartu

No.	Kegiatan	Kemungkinan	Banyak Cara
1.	Menyusun 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace	A-C A-S, A-C A-H, A-C A-D, A-S A-C, A-S A-H, A-S A-D, A-H A-C, A-H A-S, A-H A-D, A-D A-C, A-D A-S, A-D A-H	12
2.	Mengambil 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace	A-C A-S, A-C A-H, A-C A-D, ~~A-S A-C~~, A-S A-H, A-S A-D, ~~A-H A-C~~, ~~A-H A-S~~, A-H A-D, ~~A-D A-C~~, ~~A-D A-S~~, ~~A-D A-H~~	6
3.	Menyusun 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace		
4.	Mengambil 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace		
5.	Menyusun 4 kartu Ace dari 4 kartu Ace		
6.	Mengambil 4 kartu Ace dari 4 kartu Ace		
7.	Menyusun 2 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C		
8.	Mengambil 2 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C		

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Ayo Menanya

Dari kegiatan-kegiatan tentang penyusunan dan pengambilan kartu di atas, buatlah pertanyaan-pertanyaan. Anda dapat menggunakan kata bantu seperti: perbedaan atau persamaan, cara menentukan banyak penyusunan atau pengambilan, aturan penjumlahan dan perkalian. Sebagai contoh pertanyaannya adalah:

1. Apa perbedaan dan persamaan dari penyusunan dan pengambilan?
2. Apakah ada cara atau formula umum untuk menentukan banyak cara penyusunan dan banyak cara pengambilan?
3. Apakah aturan penjumlahan dan perkalian dapat digunakan dalam menentukan banyak cara penyusunan atau pengambilan?

Tuliskan beberapa pertanyaan Anda pada kotak berikut dan Anda boleh menggunakan contoh pertanyaan tersebut.

Sekarang perhatikan kembali kegiatan-kegiatan di atas. Ketika Anda menyusun 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) (kegiatan nomor 1), maka diperoleh semua susunan seperti pada Tabel 1.4. Dalam hal menyusun 2 kartu Ace, tentu susunan A-C A-S tidak sama dengan susunan A-S A-C walaupun penyusunan sama. Tetapi ketika Anda mengambil 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) (kegiatan nomor 2), tentu pengambilan kartu A-C A-S akan sama dengan pengambilan kartu A-S A-C. Demikian juga untuk kegiatan nomor 3, penyusunan 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D), tentu susunan A-C A-S A-H, A-C A-H A-S, A-S A-C A-H, A-S A-H A-C, A-H A-C A-S, dan A-H A-S A-C berbeda walaupun penyusunannya sama yaitu A-C, A-S, dan A-H. Tetapi kegiatan nomor 4, pengambilan 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D), keenam kemungkinan A-C A-S A-H, A-C A-H A-S, A-S A-C A-H, A-S A-H A-C, A-H A-C A-S, dan A-H A-S A-C adalah sama. Demikian juga untuk kegiatan nomor 5, 6, 7, dan 8.

Dari penjelasan di atas, terdapat perbedaan penyusunan dan pengambilan. Kalau dalam penyusunan urutan diperhatikan, tetapi dalam pengambilan urutan tidak diperhatikan. Kesamaan dari penyusunan dan pengambilan adalah tidak ada kartu yang berulang, misalnya penyusunan A-C A-C atau pengambilan A-C A-C. Istilah *pengulangan* ini juga dikenal dengan *pengembalian*.

Penyusunan 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari *permutasi 2* unsur dari 4 unsur, dinotasikan dengan 4P2 atau P(4,2). Sedangkan pengambilan 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari *kombinasi 2* unsur dari 4 unsur, dinotasikan dengan $4C2$ atau $C(4,2)$. Dengan demikian secara umum:

- Permutasi r unsur dari n unsur merupakan penyusunan r unsur dari n unsur tanpa pengulangan dan dinotasikan dengan nPr atau $P(n,r)$ dengan $0 < r \leq n$.
- Kombinasi r unsur dari n unsur merupakan pengambilan r unsur dari n unsur tanpa pengembalian dan dinotasikan dengan nCr atau $C(n,r)$ dengan $0 < r \leq n$.

Berdasarkan informasi yang telah Anda peroleh, tulislah kesimpulan Anda berdasarkan kata-kata sendiri mengenai permutasi dan kombinasi pada kotak di bawah ini.

Ayo Mengomunikasikan

Setelah Anda mengerti tentang permutasi dan kombinasi, diskusikan dalam kelompokmu untuk menuliskan beberapa contoh permutasi dan kombinasi dan dicoba untuk dihitung berapa nilai dari permutasi dan kombinasi tersebut. Selanjutnya silakan saling menukar soal yang telah dibuat kelompok Anda untuk dikerjakan oleh kelompok lainnya. Kemudian dikoreksi pekerjaan yang telah dikerjakan oleh kelompok teman Anda. Mintalah bantuan pada guru apabila Anda mengalami permasalahan, misalnya terjadi ketidaksamaan antar kelompok dalam menyelesaikan soal. Tuliskan hasil diskusi Anda pada kotak di bawah ini.

Kegiatan 3.1.3 Menentukan Rumus Permutasi dan Penerapannya

Setelah Anda memahami tentang pengertian permutasi, selanjutnya akan dilakukan proses untuk menemukan rumus permutasi r unsur dari n unsur. Sebelum menurunkan rumus, beberapa definisi, istilah dan notasi yang berkenaan dengan masalah ini perlu diketahui dan dipahami.

NOTASI FAKTORIAL

Definisi.

Untuk suatu n bilangan asli, $n!$ (dibaca n faktorial) didefinisikan sebagai

1. $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$
2. $0! = 1$

Contoh 3.1.1

1. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
2. $3! + 4! = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad = 6 + 24 = 30$
3. $3! \cdot 4! = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \quad = 6 \cdot 24 = 144$
4. $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$

Sekarang silakan Anda berdiskusi dengan teman sebangkumu (bersebelahan) untuk mengamati contoh-contoh yang diberikan berikut.

Marilah amati contoh-contoh yang berhubungan dengan permutasi r unsur dari n unsur.

Contoh 3.1.2

Berapa banyak cara menyusun 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D)?

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan hal ini, Anda dapat membuat bantuan dua kotak sebagai tempat pengaturan dua kartu Ace tersebut, misalnya

(1)	(2)
. . .	. . .

Kotak (1) dapat diisi oleh 4 kartu Ace, yaitu A-C, A-S, A-H, A-D, sehingga pada kotak (1) ada 4 kemungkinan.

Pada kotak (2) hanya dapat diisi oleh 3 kemungkinan, karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1), yaitu:

- Jika kotak (1) diisi A-C, maka pada kotak (2) dapat diisi A-S, A-H, A-D atau
- Jika kotak (1) diisi A-S, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-H, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-H, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-S, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-D, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-S, A-H

Kemungkinan ini dapat digambarkan dengan diagram batang sebagai berikut.

Dengan demikian pada kotak (1) ada 4 kemungkinan dan kotak (2) ada 3 kemungkinan.

(1)	(2)
4	3

Dengan aturan perkalian diperoleh banyak cara penyusunan adalah $4 \cdot 3 = 12$.

Perhatikan bahwa $4 \cdot 3 = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \dfrac{4!}{(4-2)!}$

 Contoh 3.1.3

Berapa banyak cara menyusun 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D)?

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan hal ini, Anda dapat membuat bantuan tiga kotak sebagai tempat pengaturan tiga kartu Ace tersebut, misalnya

(1)	(2)	(3)
. . .	. . .	. . .

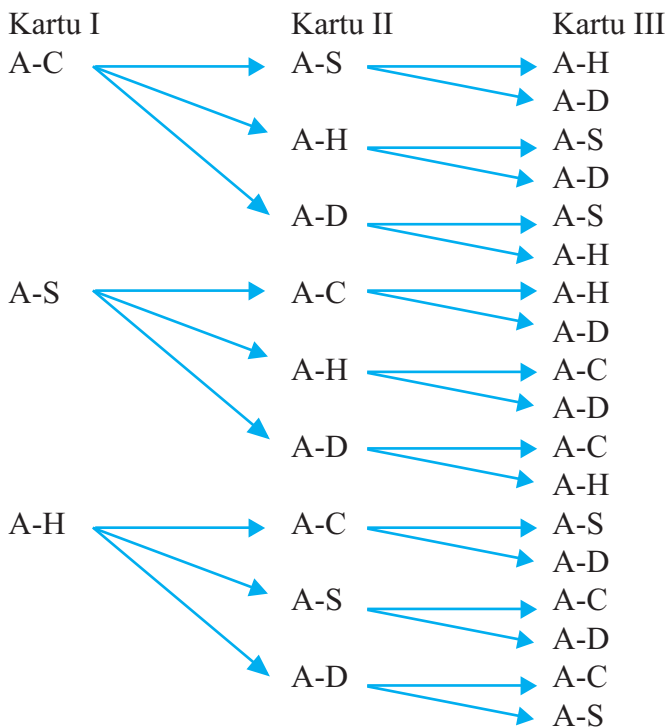
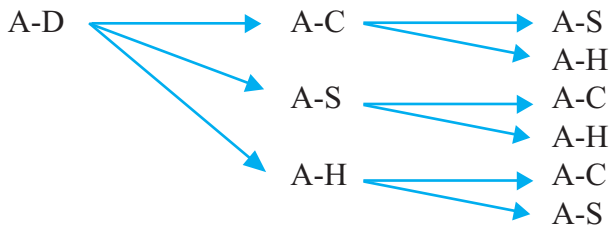
Kotak (1) dapat diisi oleh 4 kartu Ace, yaitu A-C, A-S, A-H, A-D, sehingga pada kotak (1) ada 4 kemungkinan.
Pada kotak (2) hanya dapat diisi oleh 3 kemungkinan, karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1), yaitu

- Jika kotak (1) diisi A-C, maka pada kotak (2) dapat diisi A-S, A-H, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-S, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-H, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-H, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-S, A-D
- Jika kotak (1) diisi A-D, maka pada kotak (2) dapat diisi A-C, A-S, A-H

Pada kotak (3) hanya dapat diisi oleh 2 kemungkinan, karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1) dan 1 kartu pada kotak (2) , yaitu

- Jika kotak (1) diisi A-C, kotak (2) diisi A-S, maka kotak (3) dapat diisi A-H atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-C, kotak (2) diisi A-H, maka kotak (3) dapat diisi A-S atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-C, kotak (2) diisi A-D, maka kotak (3) dapat diisi A-S atau A-H
- Jika kotak (1) diisi A-S, kotak (2) diisi A-C, maka kota (3) diisi A-H atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-S, kotak (2) diisi A-H, maka kota (3) diisi A-C atau A-D

- Jika kotak (1) diisi A-S, kotak (2) diisi A-D, maka kota (3) diisi A-C atau A-H
- Jika kotak (1) diisi A-H, kotak (2) diisi A-C, maka kotak (3) diisi A-S atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-H, kotak (2) diisi A-S, maka kotak (3) diisi A-C atau A-D
- Jika kotak (1) diisi A-H, kotak (2) diisi A-D, maka kotak (3) diisi A-C atau A-S
- Jika kotak (1) diisi A-D, kotak (2) diisi A-C, maka kotak (3) diisi A-S atau A-H
- Jika kotak (1) diisi A-D, kotak (2) diisi A-S, maka kotak (3) diisi A-C atau A-H
- Jika kotak (1) diisi A-D, kotak (2) diisi A-H, maka kotak (3) diisi A-C atau A-S

Kemungkinan ini dapat digambarkan dengan diagram batang sebagai berikut.

Dengan demikian pada kotak (1) ada 4 kemungkinan, kotak (2) ada 3 kemungkinan, dan kotak (3) ada 3 kemungkinan, yaitu

(1)	(2)	(3)
4	3	2

Dengan aturan perkalian diperoleh banyak cara penyusunan adalah $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Perhatikan bahwa $4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \frac{4!}{(4-3)!}$.

 Contoh 3.1.4

Tentukan banyak cara menyusun 3 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan hal ini, Anda dapat membuat bantuan tiga kotak sebagai tempat pengaturan tiga kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C, misalnya

(1)	(2)	(3)
. . .	. . .	. . .

Karena kartunya terdapat 5, maka kotak (1) dapat diisi oleh 5 kartu, sehingga pada kotak (1) ada 5 kemungkinan. Karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1), maka sisa kartu tinggal 4 yang akan diisikan pada kotak (2). Dengan demikian pada kotak (2) terdapat 4 kemungkinan.

Pada kotak (3) hanya dapat diisi oleh 3 kemungkinan, karena 1 kartu sudah diisikan pada kotak (1) dan 1 kartu pada kotak (2). Silakan Anda membuat diagram batang untuk menggambarkan kemungkinan tersebut. Apa yang Anda dapatkan? Jadi pada kotak (1) ada 5 kemungkinan, kotak (2) ada 3 kemungkinan, dan kotak (3) ada 3 kemungkinan, yaitu

(1)	(2)	(3)
5	4	3

Dengan aturan perkalian diperoleh banyak cara penyusunan adalah $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Perhatikan bahwa $5 \cdot 4 \cdot 3 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \dfrac{5!}{(5-3)!}$.

Contoh 3.1.5

Tentukan banyak cara mendistribusikan (membagikan) 3 kartu berbeda kepada 5 pemain dengan syarat setiap pemain paling banyak mendapatkan satu kartu.

Penyelesaian

Anda dapat menyelesaikan masalah ini dengan langkah sebagai berikut.

- Kartu pertama dapat dibagikan kepada 5 pemain, sehingga banyak cara membagikan kartu pertama sebanyak 5 kemungkinan.
- Karena satu pemain sudah mendapat 1 kartu, maka tinggal 4 pemain yang dapat dibagikan kartu kedua, sehingga banyak cara membagikan kartu kedua sebanyak 4 kemungkinan.
- Kartu ketiga (terakhir) dapat dibagikan kepada 3 pemain, karena 2 pemain sudah mendapat masing-masing 1 kartu. Sehingga banyak cara membagikan kartu ketiga sebanyak 3 kemungkinan.

Dengan menggunakan prinsip perkalian, maka banyak cara mendistribusikan 3 kartu berbeda kepada 5 pemain dengan syarat setiap pemain paling banyak mendapatkan satu kartu sama dengan $5 \cdot 4 \cdot 3 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$.

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Setelah Anda mengamati dengan cermat Contoh 3.1.2 sampai Contoh 3.1.5, mungkin Anda mempunyai beberapa pertanyaan. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana memperoleh rumus umum untuk masalah permutasi r unsur dari n unsur?
2. Apakah mungkin terjadi permutasi r unsur dari n unsur dengan $r > n$?
3. Apakah masalah mendistribusikan r unsur berbeda kepada n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat hanya boleh ditempati paling banyak 1 unsur ekuivalen dengan masalah permutasi r unsur dari n unsur?

Nah, tuliskan pertanyaan-pertanyaan Anda pada kotak berikut:

Mari kita menurunkan rumus untuk banyak permutasi r unsur dari n unsur.

– Untuk $r > n$. Karena permutasi r unsur dari n unsur merupakan penyusunan r unsur dari n unsur, maka tidak akan terjadi penyusunan, sehingga banyak permutasi r unsur dari n unsur $r > n$ adalah 0 atau $nPr = P(n, r) = 0$.
– Untuk $0 < r \leq n$, akan digunakan r kotak dalam menentukan banyak permutasi r unsur dari n, yaitu

(1)	(2)	(3)	. . .	(r)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Karena terdapat n unsur, maka kotak (1) dapat diisi oleh n kartu, sehingga pada kotak (1) ada n kemungkinan.

Karena 1 unsur sudah diisikan pada kotak (1), maka sisa kartu tinggal $n - 1$ yang akan diisikan pada kotak (2). Dengan demikian pada kotak (2) terdapat $n - 1$ kemungkinan.
Dengan demikian untuk kotak (3) terdapat $n - 2$ kemungkinan, dan seterusnya hingga kotak ke (r) terdapat ($n - r + 1$) kemungkinan.
Jadi kemungkinan pada kotak (1), (2), . . . (r), dapat dinyatakan sebagai:

(1)	(2)	(3)	. . .	(r)
n	$n - 1$	$n - 2$	. . .	$n - r + 1$

Dengan aturan perkalian diperoleh banyak permutasi r unsur dari n.

$$nPr = P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{!}{(n-r)!}.$$

Jadi banyak permutasi r unsur dari n unsur, $nPr = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$, untuk $0 < r \leq n$.

Dalam kasus $r = n$, maka $nPn = P(n,n) = n!$ dan disebut banyak *permutasi n unsur*.

Sekarang perhatikan masalah mendistribusikan r unsur berbeda ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur. Untuk menyelesaikan masalah ini, kita lakukan dengan langkah-langkah berikut.

– Unsur pertama dapat didistribusikan ke n tempat berbeda, sehingga banyak cara mendistribusikan unsur pertama adalah n cara.
– Karena 1 tempat sudah terisi unsur pertama sedangkan setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur, maka banyak cara mendistribusikan unsur kedua adalah $n - 1$ cara.
– Karena 2 tempat sudah terisi unsur pertama dan kedua sedangkan setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur, maka banyak cara mendistribusikan unsur ketiga adalah $n - 1$ cara.
– Demikian seterusnya, sehingga banyak cara mendistribusikan unsur terakhir (ke-r) sebanyak ($n - r + 1$) cara.

Jadi dengan menggunakan aturan perkalian diperoleh banyak cara mendistribusikan r unsur berbeda ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur adalah

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Berdasarkan informasi yang telah Anda peroleh, tulislah kesimpulan Anda berdasarkan kata-kata sendiri mengenai rumus untuk permutasi.

Kesimpulan

Setelah Anda mengerti menemukan rumus untuk permutasi, secara berkelompok 3–4 orang perkelompok untuk membuat 4 soal penerapan permutasi beserta jawabannya, kemudian saling menukar soal kelompok Anda dengan kelompok lain untuk dikerjakan. Setelah selesai, koreksilah jawaban kelompok yang mendapatkan soal Anda dan bantulah apabila kelompok yang diberi soal ada yang belum dijawab dengan benar. Tuliskan hasil diskusi Anda pada kotak di bawah ini.

Kegiatan 3.1.4 Menentukan Rumus Kombinasi dan Penerapannya

Pada pembahasan sebelumnya Anda telah mempelajari menentukan rumus permutasi *r* unsur dari *n* unsur dan penerapannya. Selanjutnya akan dibahas tentang kombinasi *r* unsur dari *n* unsur.

Marilah amati contoh-contoh yang berhubungan dengan kombinasi *r* unsur dari *n* unsur dan hubungannya dengan permutasi *r* unsur dari *n* unsur.

Contoh 3.1.6

Berapa banyak cara pengambilan 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D)?

Penyelesaian

Banyak cara pengambilan 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) sebanyak 6 yaitu, A-C A-S, A-C A-H, A-C A-D, A-S A-H, A-S A-D, A-H A-D. Hal ini sama halnya dengan menentukan banyaknya himpunan bagian dari {A-C, A-S, A-H, A-D} yang mempunyai 2 anggota, yaitu {A-C, A-S}, {A-C, A-H}, {A-C, A-D}, {A-S, A-H}, {A-S, A-D}, {A-H, A-D}.

Sudah dijelaskan sebelumnya bahwa banyak cara mengambil 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari kombinasi 2 unsur dari 4 unsur, $2C4$ atau C(4,2). Sedangkan banyak cara menyusun 2 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari permutasi 2 unsur dari 4 unsur, $2P4$ atau $P(4, 2)$.

Kalau Anda perhatikan bahwa banyak cara permutasi 2 unsur dari 4 unsur P(4, 2) dapat diperoleh dari menyusun setiap unsur $C(4, 2)$, yaitu {A-C, A-S}, {A-C, A-H}, {A-C, A-D}, {A-S, A-H}, {A-S, A-D}, {A-H, A-D}. Anda ketahui bahwa banyak susunan dari {A-C, A-S} sama dengan banyak permutasi 2 unsur yaitu $P(2, 2)$, demikian juga banyak susunan untuk {A-C, A-H}, {A-C, A-D}, {A-S, A-H}, {A-S, A-D}, {A-H, A-D} sama dengan $P(2, 2)$. Jadi

banyak banyak cara permutasi 2 unsur dari 4 unsur $P(4, 2)$ sama dengan banyak cara kombinasi 2 unsur dari 4 unsur $C(4, 2)$ dikalikan banyak permutasi 2 unsur $P(2, 2)$ atau $P(4, 2) = C(4,2)\, P(2, 2)$. Sehingga diperoleh $C(4, 2) = \dfrac{P(4,2)}{P(2,2)}$.

 Contoh 3.1.7

Berapa banyak cara pengambilan 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D)?

Penyelesaian

Banyak cara pengambilan 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) sebanyak 3 yaitu, A-C A-S A-H, A-C A-H A-D, A-S A-H A-D. Hal ini sama halnya dengan menentukan banyaknya himpunan bagian dari {A-C, A-S, A-H, A-D} yang mempunyai 3 anggota, yaitu {A-C, A-S. A-H}, {A-C, A-H, A-D}, {A-S, A-H, A-D}.

Banyak cara mengambil 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari kombinasi 3 unsur dari 4 unsur, $3C4$ atau $C(4, 3)$, sedangkan banyak cara menyusun 3 kartu Ace dari 4 kartu Ace (A-C, A-S, A-H, A-D) merupakan contoh dari permutasi 3 unsur dari 4 unsur, 3P4 atau $P(4, 3)$.

Kalau Anda perhatikan bahwa banyak cara permutasi 3 unsur dari 4 unsur P(4, 3) dapat diperoleh dari menyusun setiap unsur $C(4, 3)$, yaitu {A-C, A-S, A-D}, {A-C, A-H, A-D}, {A-S, A-H, A-D}. Anda ketahui bahwa banyak susunan dari {A-C, A-S, A-D} sama dengan banyak permutasi 3 unsur P(3, 3). Demikian juga banyak susunan untuk {A-C, A-H, A-D}, {A-S, A-H, A-D} sama dengan permutasi 3 unsur $P(3, 3)$. Jadi banyak banyak cara permutasi 3 unsur dari 4 unsur P(4, 3) sama dengan banyak cara kombinasi 3 unsur dari 4 unsur C(4, 2) dikalikan banyak permutasi 3 unsur $P(3, 3)$ atau $P(4, 3) = C(4,3)\, P(3, 3)$. Sehingga diperoleh $C(4,3) = \dfrac{P(4,3)}{P(3,3)}$

Contoh 3.1.8

Tentukan banyak cara pengambilan 3 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C.

Penyelesaian

Banyak cara pengambilan 3 kartu Ace dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C sama halnya dengan menentukan banyaknya himpunan bagian dari {2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C} yang mempunyai 3 anggota, yaitu 8 diantaranya: {2-C, 3-C, 4-C}, {2-C, 3-C, 5-C}, {2-C, 3-C, 6-C}, {2-C, 4-C, 5-C}, { 2-C, 4-C, 6-C}, {3-C, 4-C, 5-C}, {3-C, 4-C, 6-C}, {4-C, 5-C, 6-C}.
Banyak cara mengambil 3 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C merupakan contoh dari kombinasi 3 unsur dari 5 unsur, $3C5$ atau $C(5,3)$, sedangkan banyak cara menyusun 3 kartu dari 5 kartu 2-C, 3-C, 4-C, 5-C, 6-C merupakan contoh dari permutasi 3 unsur dari 5 unsur, 3P5 atau $P(5, 3)$.
Kalau Anda perhatikan bahwa banyak cara permutasi 3 unsur dari 5 unsur P(5,3) dapat diperoleh dari menyusun setiap unsur $C(5, 3)$, yaitu {2-C, 3-C, 4-C}, {2-C, 3-C, 5-C}, {2-C, 3-C, 6-C}, {2-C, 4-C, 5-C}, { 2-C, 4-C, 6-C}, {3-C, 4-C, 5-C}, {3-C, 4-C, 6-C}, {4-C, 5-C, 6-C}. Anda ketahui bahwa banyak susunan dari {2-C, 3-C, 4-C} sama dengan banyak permutasi 3 unsur P(3,3). Demikian juga banyak susunan untuk {2-C, 3-C, 5-C}, {2-C, 3-C, 6-C}, {2-C, 4-C, 5-C}, { 2-C, 4-C, 6-C}, {3-C, 4-C, 5-C}, {3-C, 4-C, 6-C}, {4-C, 5-C, 6-C} sama dengan permutasi 3 unsur P(3,3). Jadi banyak banyak cara permutasi 3 unsur dari 5 unsur $P(5, 3)$ sama dengan banyak cara kombinasi 3 unsur dari 5 unsur $C(5, 3)$ dikalikan banyak permutasi 3 unsur $P(3, 3)$ atau $P(5, 3) = C(5, 3)\, P(3, 3)$. Sehingga diperoleh $C(5, 3) = \dfrac{P(5,3)}{P(3,3)}$

Contoh 3.1.9

Tentukan banyak cara mendistribusikan (membagikan) 3 unsur yang sama ke 5 tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak diisi 1 unsur.

Penyelesaian

Masalah ini dapat dipandang sebagai masalah mengambil 3 tempat dari 5 tempat berbeda yang ada untuk ditempati oleh 3 unsur yang sama. Dengan demikian, masalah ini sama halnya seperti masalah pada contoh 3. Jadi banyak cara mendistribusikan (membagikan) 3 unsur yang sama ke 5 tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak diisi 1 unsur adalah $C(5,3)$.

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Setelah Anda mengamati dengan cermat Contoh 3.1.6 sampai Contoh 3.1.9, mungkin Anda mempunyai beberapa pertanyaan. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana memperoleh rumus umum untuk masalah kombinasi r unsur dari n unsur?
2. Apakah mungkin terjadi kombinasi r unsur dari n unsur dengan $r > n$?
3. Apakah masalah mendistribusikan r unsur yang sama kepada n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat hanya boleh ditempati paling banyak 1 unsur ekuivalen dengan masalah kombinasi r unsur dari n unsur?

Nah, tuliskan pertanyaan-pertanyaan Anda pada kotak berikut:

Mari kita menurunkan rumus untuk banyak kombinasi r unsur dari n unsur.

- Untuk $r > n$. Karena kombinasi r unsur dari n unsur merupakan pengambilan r unsur dari n unsur, maka tidak akan terjadi pengambilan yang demikian, sehingga banyak kombinasi r unsur dari n unsur $r > n$ adalah 0 atau $nCr = C(n, r) = 0$.
- Untuk $0 < r \leq n$, misalkan banyak kombinasi r unsur dari n unsur adalah $C(n, r)$, maka banyak kombinasi ini sama dengan banyak himpunan bagian n unsur yang mempunyai r unsur. Sedangkan permutasi r unsur dari n unsur diperoleh dari penyusunan dari setiap himpunan bagian dari n unsur yang memuat r unsur dari n unsur yaitu sebanyak $P(r, r)$, dengan kata lain permutasi dari masing-masing kombinasi r unsur dari n unsur diperoleh dari pengaturan dari masing-masing unsur dari kombinari r dari n unsur $C(n, r)$ sebanyak $P(r, r)$. Dengan demikian banyak permutasi r unsur dari n unsur $P(n, r)$ sama dengan banyak kombinasi r unsur dari n unsur $C(n, r)$ dikalikan dengan banyak permutasi untuk r unsur $P(r,r)$, yaitu $P(n, r) = C(n, r)\ P(r, r)$ atau $C(n, r) = \dfrac{P(n,r)}{P(r,r)} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$.

Jadi banyak kombinasi r unsur dari n unsur, $nCr = C(n,r) = \dfrac{P(n,r)}{P(r,r)} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$, untuk $0 < r \leq n$.

Dalam kasus $r = n$, maka $nCn = C(n, n) = 1$.

Sekarang perhatikan masalah mendistribusikan r unsur yang sama ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur. Untuk menyelesaikan masalah ini, perhatikan bahwa masalah mendistribusikan r unsur yang sama ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat paling banyak 1 unsur dapat dipandang sebagai mengambil r tempat dari n tempat berbeda untuk ditempati oleh r unsur yang sama. Hal ini sama halnya dengan masalah pengambilan r unsur dari n unsur berbeda, dan ini merupakan masalah kombinasi r unsur dari n unsur. Jadi masalah mendistribusikan r unsur yang sama ke dalam n tempat berbeda

dengan syarat setiap tempat paling banyak terisi 1 unsur merupakan masalah kombinasi r unsur dari n unsur yang rumusnya telah diturunkan di atas, yaitu $C(n, r) = \dfrac{P(n,r)}{P(r,r)} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$.

Berdasarkan informasi yang telah Anda peroleh, tulislah kesimpulan Anda berdasarkan kata-kata sendiri mengenai rumus untuk kombinasi.

Kesimpulan

Setelah Anda mengerti menemukan rumus untuk kombinasi, secara berkelompok 3–4 orang perkelompok untuk membuat 4 soal penerapan kombinasi beserta jawabannya, kemudian saling menukar soal kelompok Anda dengan kelompok lain untuk dikerjakan. Setelah selesai, koreksilah jawaban kelompok yang mendapatkan soal Anda dan bantulah apabila kelompok yang diberi soal ada yang belum dijawab dengan benar. Tuliskan hasil diskusi Anda pada kotak di bawah ini.

Kegiatan 3.1.5 Menentukan Rumus Permutasi Dengan Beberapa Unsur Sama dan Penerapannya

Pada pembahasan sebelumnya Anda telah mempelajari menentukan rumus permutasi n unsur, yaitu $P(n, n) = n!$ di mana n unsur yang diketahui adalah semuanya berbeda. Sekarang bagaimana apabila dalam n unsur terdapat beberapa unsur yang sama, bagaimana rumus untuk masalah ini. Untuk mempelajari lebih mendalam tentang hal ini mari kita perhatikan contoh-contoh berikut.

Marilah amati contoh-contoh yang berhubungan dengan permutasi dengan beberapa unsur yang sama.

Contoh 3.1.10

Tentukan banyak susunan yang diperoleh dari 3 huruf A, 2 huruf B, dan 1 huruf C.

Penyelesaian

Masalah ini dapat dipandang sebagai masalah meletakkan 3 huruf A, 2 huruf B, dan 1 huruf C ke dalam 6 tempat berbeda dengan syarat setiap tempat tepat terisi 1 huruf. Misalkan 6 tempat ini dapat diilustrasikan sebagai 6 kotak berikut.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Maka masalah ini diselesaikan dengan langkah berikut.

- Pertama letakkan 3 huruf A ke dalam 6 kotak yang tersedia, ini berarti sama dengan $C(6, 3)$.
- Berikutnya, karena 3 kotak sudah terisi, letakkan 2 huruf B ke dalam 3 kotak yang tersisa, ini berarti sama dengan $C(3, 2)$.
- Terakhir letakkan 1 huruf C ke dalam 1 kotak tersisi, yang banyaknya sama dengan $C(1, 1)$.

Dengan aturan perkalian, diperoleh banyak susunan yang diperoleh dari 3 huruf A, 2 huruf B, dan 1 huruf C adalah $C(6, 3) \cdot C(3, 2) \cdot C(1, 1) = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$.

Contoh 3.1.11

Berapa banyak cara penyusunan kata yang disusun dari kata "SUSUNAN"?

Penyelesaian

Huruf-huruf dari kata "SUSUNAN" sebanyak 7 huruf yang terdiri dari 2 huruf S, 2 huruf U, 2 huruf N dan 1 huruf A. Seperti halnya Contoh 3.1.10, masalah ini dapat dipandang sebagai masalah meletakkan 2 huruf S, 2 huruf U, 2 huruf N dan 1 huruf A ke dalam 7 tempat berbeda dengan syarat setiap tempat tepat terisi 1 huruf. Misalkan 7 tempat ini dapat diilustrasikan sebagai 7 kotak berikut.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Maka masalah ini diselesaikan dengan langkah berikut.

– Pertama letakkan 2 huruf S ke dalam 7 kotak yang tersedia, ini berarti sama dengan $C(7,2)$.
– Berikutnya, karena 2 kotak sudah terisi, letakkan 2 huruf U ke dalam 5 kotak yang tersisa, ini berarti sama dengan $C(5,2)$.
– Selanjutnya, karena sudah 4 kotak sudah terisi, maka letakkan 2 huruf N kedalam 3 kotak yang tersisi, sehingga banyak cara adalah $C(3,2)$.
– Terakhir letakkan 1 huruf C ke dalam 1 kotak tersisi, yang banyaknya sama dengan $C(1,1)$.

Dengan aturan perkalian, diperoleh cara penyusunan kata yang disusun dari kata 'SUSUNAN" adalah

$$C(7,2) \cdot C(5,2) \cdot C(3,2) \cdot C(1,1) = \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} = \frac{7!}{2!2!2!1!} = 630.$$

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Ayo Menanya

Setelah Anda mengamati dengan cermat Contoh 3.1.10 dan Contoh 3.1.11, mungkin Anda mempunyai beberapa pertanyaan berkaitan dengan permutasi untuk beberapa unsur yang sama. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut.

Bagaimana memperoleh rumus umum untuk masalah permutasi n_1, n_2, n_3, . . . n_k unsur dari n unsur?

Nah, tuliskan pertanyaan-pertanyaan Anda pada kotak berikut.

Ayo Menggali Informasi

Mari kita menurunkan rumus permutasi n unsur yang terdiri dari n_1 unsur jenis pertama, n_2 unsur jenis kedua, n_3 unsur jenis ketiga, . . . , n_k unsur jenis ke-k $(n = n_1 + n_2 + n_3 + . . . + n_k)$.

Untuk menentukan masalah banyak permutasi ini, maka masalah ini dapat dipandang sebagai masalah meletakkan n_1 unsur jenis pertama, n_2 unsur jenis kedua, n_3 unsur jenis ketiga, . . . , n_k unsur jenis ke-k ke dalam n tempat berbeda dengan syarat setiap tempat tepat terisi 1 huruf. Misalkan n tempat ini dapat diilustrasikan sebagai n kotak berikut.

(1)	(2)	(3)	. . .	(n)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Maka masalah ini diselesaikan dengan langkah berikut.

- Pertama letakkan n_1 unsur jenis pertama ke dalam n kotak yang tersedia, ini berarti sama dengan $C(n, n_1)$ cara dan tersisa $n - n_1$ kotak.
- Berikutnya, letakkan n_2 unsur jenis kedua ke dalam $n - n_1$ kotak yang tersisa, maka terdapat sebanyak $C(n - n_1, n_2)$ cara, dan tersisa $n - n_1 - n_2$.
- Selanjutnya letakkan n_3 unsur jenis ketiga ke dalam $n - n_1 - n_2$ kotak tersisi, sehingga terdapat sebanyak $C(n - n_1 - n_2, n_3)$.
- Kemudian dilakukan peletakan n_4 unsur jenis keempat, dan seterusnya hingga terakhir meletakkan n_k unsur ke-k ke dalam $n - n_1 - n_2 - n_3 - . . . - n_{k-1} = n_k$ kotak yang tersisa dengan $C(n - n_1 - n_2, n_3 - . . . - n_{k-1} - n_k, n_k)$ cara.

Dengan aturan perkalian, diperoleh banyak permutasi n unsur yang terdiri dari n_1 unsur jenis pertama, n_2 unsur jenis kedua, n_3 unsur jenis ketiga, . . . , n_k unsur jenis ke-k sama dengan

$$C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdot C(n - n_1 - n_2, n_3) \dots C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n_1}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1})!}{n_k!0!}$$

$$= \frac{n_1}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Jadi rumus permutasi n unsur yang terdiri dari n_1 unsur jenis pertama, n_2 unsur jenis kedua, n_3 unsur jenis ketiga, . . . , n_k unsur jenis ke-k ($n = n_1 + n_2 + r_3 + . . . + n_k$) adalah $\frac{n_1}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$.

Berdasarkan informasi yang telah Anda peroleh, tulislah kesimpulan Anda berdasarkan kata-kata sendiri mengenai rumus untuk permutasi dengan beberapa unsur yang sama.

Kesimpulan

Setelah Anda menemukan rumus untuk permutasi n unsur yang terdiri dari n_1 unsur jenis pertama, n_2 unsur jenis kedua, n_3 unsur jenis ketiga, . . . , n_k unsur jenis ke-k ($n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$) yaitu

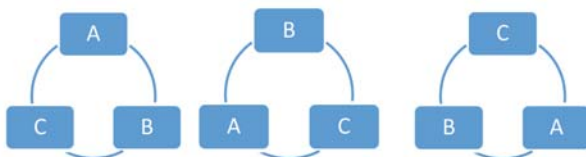
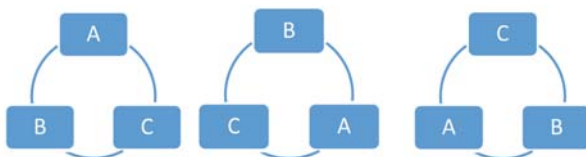
$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots \cdot n_k!},$$

secara berkelompok 3–4 orang perkelompok untuk membuat 4 soal penerapan masalah permutasi dengan unsur yang sama, kemudian saling menukar soal kelompok Anda dengan kelompok lain untuk dikerjakan. Setelah selesai, koreksilah jawaban kelompok yang mendapatkan soal Anda dan bantulah apabila kelompok yang diberi soal ada yang belum dijawab dengan benar. Tuliskan hasil diskusi Anda pada kotak di bawah ini.

Kegiatan 3.1.6 Menentukan Rumus Permutasi Siklis dan Penerapannya

Pada pembahasan sebelumnya Anda telah mempelajari menentukan rumus permutasi n unsur, yaitu $P(n,n) = n!$ di mana n unsur yang diketahui adalah semuanya berbeda. Susunan dari unsur-unsur ini dibuat secara mendatar (lurus). Sebagai contoh, apabila kita ingin menyusun 3 unsur A, B, C, maka susunannya sebanyak 3! = 6 yaitu:

A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Akan tetapi, apabila kita susun secara melingkar maka ketiga susunan berikut walaupun nampak berbeda, namun jika dilihat dari urutan (searah jarum jam misalnya) maka ketiga susunan ini adalah sama.

Demikian juga untuk ketiga susunan berikut adalah sama.

Penyusunan unsur-unsur dalam bentuk melingkar ini disebut permutasi siklis (*circular permutation*).

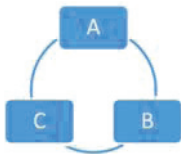
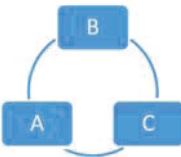
Sekarang akan mempelajari permutasi siklis lebih detail melalui pengamatan berikut.

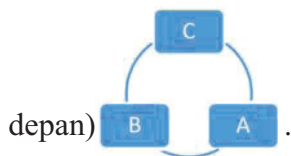
Marilah amati contoh-contoh yang berhubungan dengan permutasi melingkar berikut.

Contoh 3.1.12

Tentukan banyak permutasi siklis dari A, B, C.

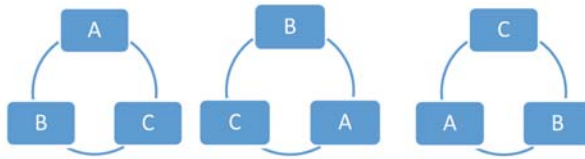
Penyelesaian

Salah satu susunan permutasi siklis adalah A, B, C (A unsur paling atas/depan).

yang ekuivalen dengan B, C , A (B unsur paling atas/depan)

dan juga ekuivalen dengan C, A, B (C unsur paling atas/ depan)

.

Akan tetapi ketiga permutasi siklis di atas, apabila dinyatakan dalam permutasi mendatar maka susunannya berbeda, yaitu

$$A, B, C$$
$$B, C, A$$
$$C, A, B$$

Demikian juga untuk ketiga susunan berikut adalah sama, tetapi kalau dinyatakan dalam permutasi mendatar menjadi berbeda, yaitu

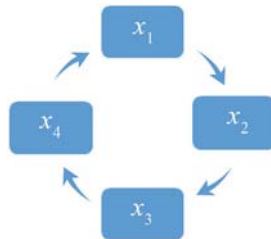
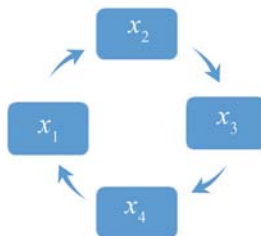
$$A, C, B$$
$$B, A, C$$
$$C, B, A$$

Ini berarti 1 susunan permutasi siklis berkorespondensi dengan 3 susunan permutasi mendatar.

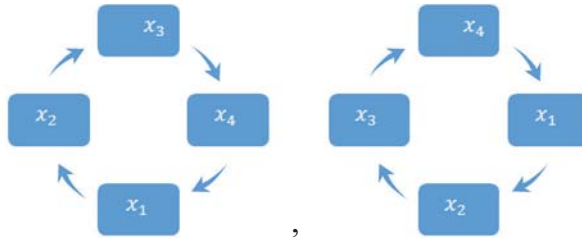
Jadi, karena banyaknya permutasi (mendatar) dari 3 unsur *A, B, C* adalah 3! = 6 cara, sedangkan setiap 3 susunan permutasi mendatar berkorespondensi dengan 1 susunan permutasi siklis, maka banyak permutasi siklis untuk 3 unsur adalah $\frac{3!}{3} = 2! = 2$ cara.

 Contoh 3.1.13

Tentukan banyak permutasi siklis dari 4 unsur.

Penyelesaian

Misalkan 4 unsur itu diberi nama x_1, x_2, x_3, x_4. Maka salah satu susunan permutasi siklis adalah dengan urutan x_1, x_2, x_3, x_4 (x_1 unsur paling atas/depan).

Dengan meletakkan unsur paling atas/depan x_2 dan urutannya seperti di atas, yaitu x_2, x_3, x_4, x_1, maka susunannya menjadi

yang ekuivalen dengan susunan sebelumnya.

Demikian juga dengan urutan sama, tetapi unsur paling atas/depan $x_3(x_3, x_4, x_1, x_2)$ dan $x_4(x_4, x_1, x_2, x_3)$, maka susunannya berturut-turut adalah

yang juga ekuivalen dengan susunan pertama x_1, x_2, x_3, x_4.

Dengan demikian keempat susunan di atas ekuivalen.

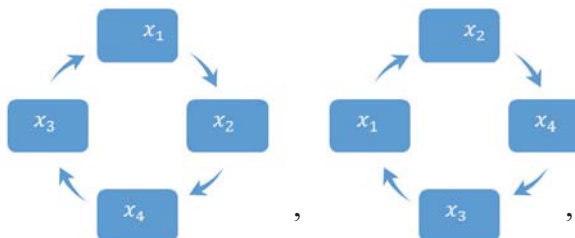
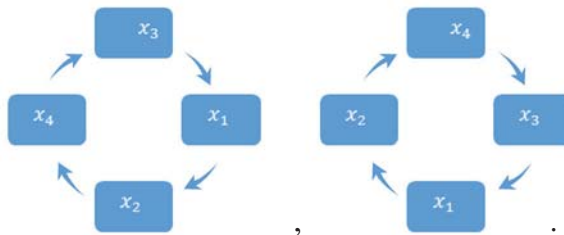
Akan tetapi keempat permutasi siklis di atas, apabila dinyatakan dalam permutasi mendatar maka susunannya berbeda yaitu

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$
$$x_2, x_3, x_4, x_1$$
$$x_3, x_4, x_1, x_2$$
$$x_4, x_1, x_2, x_3$$

Ini berarti 1 susunan permutasi siklis berkorespondensi dengan 4 susunan permutasi mendatar.

Demikian juga untuk permutasi siklis yang lain misalnya

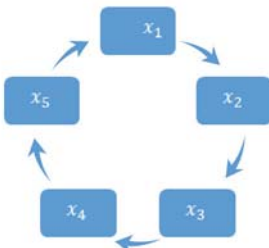
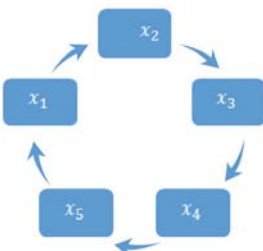
x_1, x_2, x_4, x_3 akan berkorespondensi dengan 4 permutasi datar dengan meletakkan unsur paling depan x_1, x_2, x_4, dan x_3 tetapi dalam urutan yang sama, yaitu

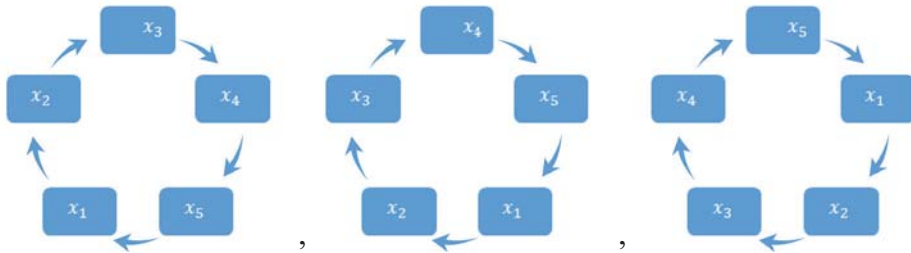
$$x_1, x_2, x_4, x_3$$
$$x_2, x_4, x_3, x_1$$
$$x_3, x_1, x_2, x_4$$
$$x_4, x_3, x_1, x_2$$

Jadi, karena banyaknya permutasi (mendatar) dari 4 unsur adalah 4! = 24 cara, sedangkan setiap 4 susunan permutasi mendatar berkorespondensi dengan 1 susunan permutasi siklis, maka banyak permutasi siklis untuk 4 unsur adalah $\frac{4!}{4} = 3! = 6$ cara.

 Contoh 3.1.14

Tentukan banyak permutasi siklis dari 5 unsur.

Penyelesaian

Misalkan 5 unsur itu diberi nama x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Maka salah satu susunan permutasi siklis adalah dengan urutan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (x_1 unsur paling atas/depan).

Dengan meletakkan unsur paling atas/depan x_2 dan urutannya seperti di atas, yaitu x_2, x_3, x_4, x_5, x_1 maka susunannya menjadi

yang ekuivalen dengan susunan sebelumnya.

Demikian juga dengan urutan sama, tetapi unsur paling atas/depan $x_3(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2)$, $x_4(x_4, x_5, x_1, x_2, x_3)$ dan $x_5(x_5, x_1, x_2, x_3, x_4)$, maka susunannya berturut-turut adalah

yang juga ekuivalen dengan susunan pertama x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Dengan demikian kelima susunan di atas ekuivalen.

Akan tetapi kelima permutasi siklis di atas, apabila dinyatakan dalam permutasi mendatar maka susunannya berbeda yaitu

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$
$$x_2, x_3, x_4, x_5, x_1$$
$$x_3, x_4, x_5, x_1, x_2$$
$$x_4, x_5, x_1, x_2, x_3$$
$$x_5, x_1, x_2, x_3, x_4.$$

Ini berarti 1 sususan permutasi siklis berkorespondensi dengan 5 susunan permutasi mendatar.
Demikian juga untuk permutasi siklis yang lain

x_1, x_2, x_3, x_5, x_4 akan berkorespondensi dengan 5 permutasi datar dengan meletakkan unsur paling depan x_1, x_2, x_3, x_5, dan x_4 tetapi dalam urutan yang sama, yaitu

$$x_1, x_2, x_3, x_5, x_4$$
$$x_2, x_3, x_5, x_4, x_1$$
$$x_3, x_5, x_4, x_1, x_2$$
$$x_5, x_4, x_1, x_2, x_3$$
$$x_4, x_1, x_2, x_3, x_5.$$

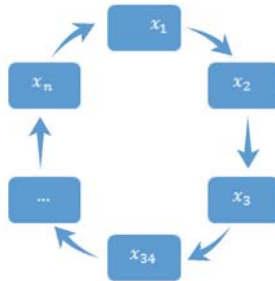
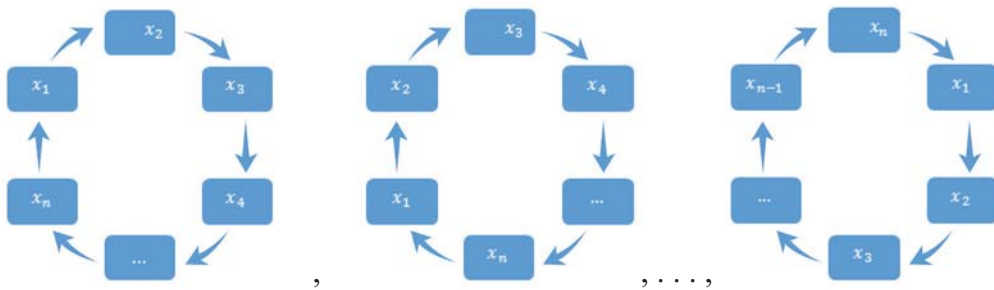
Jadi, karena banyaknya permutasi (mendatar) dari 5 unsur adalah 5! = 120 cara, sedangkan setiap 5 susunan permutasi mendatar berkorespondensi dengan 1 susunan permutasi siklis, maka banyak permutasi siklis untuk 5 unsur adalah $\frac{5!}{5} = 4! = 20$ cara.

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Setelah Anda mengamati dengan cermat Contoh 3.1.12, Contoh 3.1.13 dan Contoh 3.1.14, mungkin Anda mempunyai beberapa pertanyaan berkaitan dengan permutasi siklis.

Bagaimana memperoleh rumus umum untuk masalah permutasi siklis dari n unsur?

Nah, tuliskan pertanyaan-pertanyaan Anda pada kotak berikut:

Mari kita menurunkan rumus permutasi siklis n unsur.
Misalkan n unsur itu diberi nama $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Maka salah satu susunan permutasi siklis adalah dengan urutan $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ (x_1 unsur paling atas/depan).

Dengan meletakkan unsur paling atas/depan $x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ dan urutannya seperti di atas, maka susunannya menjadi

yang juga ekuivalen dengan susunan pertama $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.
Dengan demikian n susunan di atas ekuivalen.
Akan tetapi n permutasi siklis di atas, apabila dinyatakan dalam permutasi mendatar maka susunannya berbeda yaitu

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$$
$$x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1$$
$$x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1, x_2$$
$$\ldots$$
$$x_n, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}.$$

Ini berarti 1 susunan permutasi siklis berkorespondensi dengan n susunan permutasi mendatar.

Jadi, karena banyaknya permutasi (mendatar) dari n unsur adalah $n!$ cara, sedangkan setiap n susunan permutasi mendatar berkorespondensi dengan 1 susunan permutasi siklis, maka banyak permutasi siklis untuk n unsur adalah $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ cara.

Berdasarkan informasi yang telah Anda peroleh, tulislah kesimpulan Anda berdasarkan kata-kata sendiri mengenai rumus untuk permutasi siklis.

Kesimpulan:

Ayo Mengomunikasikan

Setelah Anda menemukan rumus untuk permutasi siklis n unsur yaitu $(n-1)!$, secara berkelompok 3–4 orang perkelompok untuk membuat 4 soal penerapan masalah permutasi dengan unsur yang sama, kemudian saling menukar soal kelompok Anda dengan kelompok lain untuk dikerjakan. Setelah selesai, koreksilah jawaban kelompok yang mendapatkan soal Anda dan bantulah apabila kelompok yang diberi soal ada yang belum dijawab dengan benar. Tuliskan hasil diskusi Anda pada kotak di bawah ini.

Latihan Soal 3. 1

1. Pada satu kelas terdapat 24 siswa wanita dan 16 siswa pria. Apabila akan dipilih satu siswa untuk mengikuti lomba mewakili kelas tersebut, berapa banyak cara yang dapat di lakukan?
2. Amir harus mengerjakan hal-hal berikut selama istirahat makan siang yaitu makan siang, pergi ke kantor pos, pergi ke bank, dan membeli surat kabar. Tentukan banyaknya cara Amir mengerjakan hal-hal tersebut.
3. Tentukan nilai n pada persamaan $P(n + 1,3) = P(n, 4)$.
4. Diberikan angka-angka 2, 3, 5, 6, 7, dan 8. Dari angka-angka tersebut akan dibentuk bilangan yang terdiri atas tiga angka. Jika tidak boleh terjadi pengulangan angka,
   a. Tentukan banyaknya bilangan yang bisa diperoleh,
   b. Tentukan banyaknya bilangan genap yang bisa diperoleh,
   c. Tentukan banyaknya bilangan ganjil yang bisa diperoleh,
   d. Tentukan banyaknya bilangan kelipatan 5 yang bisa diperoleh,
   e. Tentukan banyaknya bilangan kurang dari 400 yang bisa diperoleh.
5. Berapa banyak permutasi dari huruf-huruf *A, B, C, D, E, F, G*, dan *H* yang memuat
   a. susunan *BCD*,
   b. susunan *CFGA*,
   c. susunan *BA* atau *GA*,
   d. susunan *ABC* atau *DE*,
   e. susunan *ABC* atau *CDE*,
   f. susunan *CBA* atau *BED*.

Subbab 3.2 Kejadian Majemuk, Peluang Saling Lepas, Peluang Saling Bebas, dan Peluang Bersyarat

Kegiatan 3.2.1 Kejadian Majemuk

Anda mungkin pernah melihat kegiatan pelantunan koin pada setiap awal pertandingan sepak bola dan pelantunan dadu pada acara arisan PKK.

Sumber: *www.m.everythingmaths.com*

Gambar 3.2.1

Amati gambar koin dan dadu di atas. Kemungkinan-kemungkinan yang terjadi pada pelantunan sebuah koin dan sebuah dadu secara bersamaan adalah {(A, 1), (A, 2), (A, 3), (A, 4), (A, 5), (A, 6), (G, 1), (G, 2), (G, 3), (G, 4), (G, 5), (G, 6)}.

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Ayo Menanya

Setelah Anda mengamati gambar sebuah koin dan sebuah dadu di atas, buat pertanyaan agar Anda dapat mendefinisikan kejadian majemuk. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut.

1. Paling sedikit berapa kejadian yang dapat membentuk kejadian majemuk?
2. Hubungan apa saja yang mungkin terjadi pada kejadian majemuk?

Tuliskan pertanyaan Anda pada kotak di bawah ini.

Anda pasti membutuhkan informasi untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan yang sudah Anda buat agar dapat lebih memahami tentang kejadian majemuk. Di bawah ini Anda diminta untuk melengkapi beberapa kegiatan.

Contoh 3.2.1

Ardi memiliki sebuah wadah yang berisi bola terdiri dari bola putih, bola merah, dan bola hijau. Tentukan kejadian yang mungkin terjadi pada pengambilan dua bola dalam wadah tersebut.

Penyelesaian

Misal: P = Kejadian terambil bola putih
Q = Kejadian terambil bola merah
R = Kejadian terambil bola hijau

Kejadian I:
Kejadian terambilnya bola putih dan merah
Dinotasikan: $(P \cap Q)$

Kejadian II:

____

Dinotasikan: ________________

Kejadian III:

____

Dinotasikan: ________________

Contoh 3.2.2

Pengunjung suatu toko elektronik diklasifikasikan berdasarkan jenis kelamin yaitu laki-laki dan perempuan serta berdasarkan usia kurang dari 35 tahun dan lebih dari 35 tahun. Tentukan kejadian majemuk yang mungkin terjadi.

Penyelesaian

Misal:
A = Kejadian pengunjung laki-laki
B = Kejadian pengunjung perempuan
C = Kejadian pengunjung berusia kurang dari 35 tahun
D = Kejadian pengunjung berusia lebih dari 35 tahun

Kejadian I:
Kejadian pengunjung toko laki-laki atau perempuan
Dinotasikan: $(A \cup B)$

Kejadian II:
Kejadian pengunjung toko berusia kurang dari 35 tahun atau lebih dari 35 tahun
Dinotasikan: ________________

Kejadian III:
Kejadian pengunjung toko laki-laki dan berusia kurang dari 35 tahun
Dinotasikan: $(A \cap C)$

Kejadian IV:
Kejadian pengunjung toko laki-laki ________________ berusia lebih dari 35 tahun
Dinotasikan: ________________

Kejadian V:

____

Dinotasikan: $(B \cap C)$

Kejadian VI:

____

Dinotasikan: ________________

Contoh 3.2.3

Perpustakaan sekolah memiliki koleksi 2 jenis buku yaitu buku pelajaran dan buku bacaan. Setiap siswa diperbolehkan paling banyak meminjam 2 buku. Kusuma akan meminjam buku di perpustakaan sekolah. Tentukan kejadian majemuk yang mungkin terjadi.

Penyelesaian

Misal:
U = Kejadian meminjam buku pelajaran
V = ____

Kejadian I:
Kejadian Kusuma meminjam buku pelajaran atau buku bacaan
Dinotasikan: $(U \cup V)$

Kejadian II:
Kejadian Kusuma meminjam buku pelajaran dan buku bacaan
Dinotasikan: ________________

Tuliskan kesimpulan Anda tentang peluang kejadian majemuk berdasarkan jawaban dari kegiatan di atas pada kotak di bawah ini.

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap. Tuliskan hasil diskusi pada kotak di bawah ini.

Kegiatan 3.2.2 Peluang Saling Lepas

Dadu 2 \ Dadu 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Sumber: *www.tugask5.blogspot.com*

Gambar 3.2.2

Pada kegiatan arisan biasanya dilakukan pelantunan dua dadu sebanyak satu kali untuk menentukan anggota yang akan mendapatkan uang arisan yang telah terkumpul. Anggota yang mendapatkan jumlah mata terbesar yang berhak untuk mendapatkan uang tersebut. Gambar 3.2.2 merupakan tabel hasil pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan.

Misalkan A merupakan kejadian munculnya mata dadu berjumlah 2 dan B merupakan kejadian munculnya mata dadu berjumlah 3, maka peluang munculnya mata dadu berjumlah 2 atau 3 dapat didapat dengan cara:

Banyaknya sampel keseluruhan adalah 36

n (S) = 36

Sampel dari mata dadu yang berjumlah 2 ada 1, yaitu

A = {(1,1)}

Sampel dari mata dadu yang berjumlah 3 ada 2, yaitu

B = {(1,2), (2,1)}

Sehingga peluang munculnya mata dadu 2 atau 3 adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36}$$
$$= \frac{3}{36}$$
$$= \frac{1}{12}$$

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Ayo Menanya

Setelah Anda mengamati tabel hasil pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan, buat pertanyaan agar Anda dapat mendefinisikan peluang saling lepas. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut.

1. Kejadian-kejadian yang bagaimanakah dapat membentuk kejadian saling lepas?
2. Bagaimana menentukan peluang dari kejadian saling lepas?

Tuliskan pertanyaan Anda pada kotak di bawah ini.

Anda pasti membutuhkan informasi untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan yang sudah Anda buat agar dapat lebih memahami tentang peluang saling lepas dan menentukan rumus peluang saling lepas. Di bawah ini Anda diminta untuk melengkapi beberapa kegiatan.

Contoh 3.2.4

Dua dadu dilemparkan satu kali secara bersamaan. Tentukan peluang muncul mata dadu berjumlah 5 atau 7.

Penyelesaian

Misal:
A = Kejadian muncul mata dadu yang berjumlah 5
B = Kejadian muncul mata dadu yang berjumlah 7

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena munculnya mata dadu berjumlah 5 tidak mungkin bersamaan dengan munculnya mata dadu berjumlah 7.
Peluang dari kejadian munculnya mata dadu berjumlah 5 atau mata dadu berjumlah 7 didapat dengan cara:

Banyaknya sampel keseluruhan
$n(S) = 36$
Sampel dari mata dadu yang berjumlah 5
$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$
Banyaknya sampel mata dadu yang berjumlah 5
$n(A) = 4$

Sampel dari mata dadu yang berjumlah 7

B = {______________________________________}

Banyaknya sampel mata dadu yang berjumlah 7

n (B) = ______

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{\dots}{36} + \frac{\dots}{36}$$

$$= \frac{\dots}{36}$$

$$= \frac{\dots}{\dots}$$

Jadi peluang munculnya mata dadu berjumlah 5 atau mata dadu berjumlah 7 pada pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan adalah

____

 Contoh 3.2.5

Seorang manajer suatu perusahaan mengambil sebuah berkas lamaran pekerjaan secara acak untuk diperiksa dari lima belas berkas yang diajukan oleh 10 lulusan PTN dan 5 lulusan PTS. Para pelamar yang mengajukan terdapat 3 pelamar memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun, 7 pelamar memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun, dan 5 pelamar belum memiliki pengalaman kerja. Tentukan kejadian saling lepas yang mungkin terjadi dan hitunglah peluang dari kejadian saling lepas yang diperoleh!

Penyelesaian

Misal:

P = Kejadian pelamar lulusan PTN

Q = ______________________________________

R = ______________________________________

S = Kejadian pelamar memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun

T = ______________________________________

Kejadian I:

Pelamar lulusan PTN atau lulusan PTS

Dinotasikan: ________________

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena terpilihnya berkas pelamar lulusan PTN dengan pelamar lulusan PTS tidak mungkin terjadi pada waktu yang sama. Peluang dari kejadian terpilihnya berkas pelamar lulusan PTN atau lulusan PTS didapat dengan cara:

$$P(P \cup Q) = P(P) + P(Q)$$

$$= \frac{10}{15} + \frac{5}{15}$$

$$= \frac{\dots}{\dots}$$

$$= 1$$

Kejadian II:

Pelamar ________________________ atau ________________________

Dinotasikan: $P(R \cup S)$

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena terpilihnya berkas pelamar yang memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun dengan pelamar yang memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun tidak mungkin terjadi pada waktu yang sama. Peluang dari kejadian terpilihnya berkas pelamar yang memiliki pengalaman kerja kurang dari 2 tahun atau pelamar yang memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun didapat dengan cara:

$$P(R \cup S) = P(R) + P(S)$$

$$= \frac{3}{15} + \frac{7}{15}$$

$$= \frac{\dots}{\dots}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Kejadian III:

Pelamar ____

Dinotasikan: ______________

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena ______________

____

____

Peluang dari kejadian terpilihnya berkas pelamar yang memiliki pengalaman kerja lebih dari 2 tahun atau tidak memiliki pengalaman kerja didapat dengan cara:

$$P(\ldots\ldots \cup \ldots\ldots) = P(\ldots\ldots) + P(\ldots\ldots)$$

$$= \frac{\ldots}{\ldots} + \frac{\ldots}{\ldots}$$

$$= \frac{\ldots}{\ldots}$$

$$= \frac{\ldots}{\ldots}$$

Tuliskan kesimpulan Anda tentang peluang saling lepas dan rumus peluang saling lepas berdasarkan jawaban dari kegiatan di atas pada kotak di bawah ini.

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap. Tuliskan hasil diskusi pada kotak di bawah ini.

Kegiatan 3.2.3 Peluang Saling Bebas

Sumber: *www.2pc-lot-creative-multi-color.com*

Gambar 3.2.3

Apabila Anda melempar dua dadu berwarna merah dan putih secara bersama-sama, tentukan peluang munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah dan mata dadu 5 pada dadu warna putih.

Penyelesaian

Misal:

A = Kejadian munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah

B = Kejadian munculnya mata dadu 5 pada dadu warna putih

Kejadian ini merupakan kejadian saling bebas karena munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah tidak mempengaruhi kejadian munculnya mata dadu 5 pada dadu warna putih.

Peluang dari kejadian munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah dan mata dadu 5 pada dadu warna putih didapat dengan cara:
Banyaknya sampel keseluruhan
$n(S) = 36$
Sampel dari munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah
$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$
Banyak sampel munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah
$n(A) = 6$
Sampel dari munculnya mata dadu 5 pada dadu warna putih
$B = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)\}$
Banyaknya sampel munculnya mata dadu 5 pada dadu warna hijau
$n(B) = 6$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)\ P(B) \\ &= \left(\frac{6}{36}\right)\left(\frac{6}{36}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Jadi peluang munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah dan munculnya mata dadu 5 pada dadu warna putih pada pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan adalah $\frac{1}{36}$.

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Ayo Menanya

Setelah Anda melakukan pengamatan di atas, buat pertanyaan agar Anda dapat mendefinisikan peluang saling bebas. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut.

1. Kejadian-kejadian yang bagaimanakah dapat membentuk kejadian saling bebas?
2. Bagaimana menentukan peluang dari kejadian saling bebas?

Tuliskan pertanyaan Anda pada kotak di bawah ini.

Anda pasti membutuhkan informasi untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan yang sudah Anda buat agar dapat lebih memahami tentang peluang saling bebas dan menentukan rumus peluang saling bebas. Di bawah ini Anda diminta untuk melengkapi beberapa kegiatan.

Contoh 3.2.6

Sebuah dadu dan sebuah koin dilantunkan secara bersamaan sebanyak satu kali, berapa peluang munculnya mata dadu genap pada dadu dan munculnya gambar (G) pada koin?

Penyelesaian

Misalkan

P = Kejadian muncul mata dadu genap pada dadu

Q = Kejadian muncul gambar (G) pada koin

Kejadian ini merupakan kejadian saling bebas karena munculnya mata dadu genap pada dadu tidak mempengaruhi kejadian munculnya gambar (G) pada koin.

Peluang dari kejadian munculnya mata dadu genap pada dadu dan gambar (G) pada koin didapat dengan cara:

Banyaknya sampel keseluruhan

n (S) = 12

Sampel dari munculnya mata dadu genap pada dadu

P = {(2,*A*), (2,*G*), (4,*A*), (4,*G*), (6,*A*), (6,*G*)}

Banyaknya sampel munculnya mata dadu genap pada dadu

n (P) = 6

Sampel dari munculnya Gambar (G) pada koin

Q = {(1,*G*), (2,*G*), (3,*G*), (4,*G*), (5,*G*), (6,*G*)}

Banyaknya sampel munculnya gambar (G) pada koin

n (Q) = 6

$$P(P \cap Q) = P(P)\ P(Q)$$

$$= \left(\frac{6}{12}\right)\left(\frac{6}{12}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

Jadi peluang munculnya mata dadu genap pada dadu dan munculnya gambar (G) pada koin pada pelantunan sebuah dadu dan sebuah koin sebanyak satu kali secara bersamaan adalah $\frac{1}{4}$.

Contoh 3.2.7

Dua dadu dilantunkan dua kali. Berapa peluangnya mendapat jumlah 7 dan 11 dalam dua kali lantunan?

Penyelesaian

Misalkan

Y_1 = Kejadian muncul jumlah 7 pada lantunan pertama

Y_2 = Kejadian muncul jumlah 7 pada lantunan kedua

Z_1 = Kejadian muncul jumlah 11 pada lantunan pertama
Z_2 = Kejadian muncul jumlah 11 pada lantunan kedua

Kejadian ini merupakan kejadian saling bebas karena ____________________
____
____

Peluang dari kejadian munculnya jumlah 7 dan 11 pada dua kali lantunan didapat dengan cara:

$$P\,(Y_1 \cap Z_2) \cup (Z_1 \cap Y_2) = P(Y_1)\,P(Z_2) + P(Y_2)\,P(Z_1)$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{\ldots}\right) + \left(\frac{1}{\ldots}\right)\left(\frac{1}{\ldots}\right)$$
$$= \frac{1}{\ldots} + \frac{1}{\ldots} \quad \ldots$$
$$= \frac{\ldots}{\ldots}$$

Jadi peluang munculnya jumlah 7 dan 11 pada dua kali lantunan adalah ____________________

Tuliskan kesimpulan Anda tentang peluang saling bebas dan rumus peluang saling bebas berdasarkan jawaban dari kegiatan di atas pada kotak di bawah ini.

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap. Tuliskan hasil diskusi pada kotak di bawah ini.

Kegiatan 3.2.4 Peluang Bersyarat

Apabila diambil dua kartu secara acak satu persatu tanpa pengembalian, peluang terambilnya keduanya kartu Heart didapat dengan cara:
Misal:
A = Kejadian terambilnya kartu Heart pada pengambilan pertama
B = Kejadian terambilnya kartu Heart pada pengambilan kedua

Kejadian terambilnya kartu Heart yang pertama mempengaruhi terambilnya kartu Heart yang kedua, sehingga peluang terambilnya keduanya kartu Heart adalah

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A)$$

$$= \left(\frac{13}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)$$

$$= \frac{156}{2.652} = \frac{3}{51}$$

Tuliskan istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan pada kotak di bawah ini.

Ayo Menanya

Setelah Anda melakukan pengamatan di atas, buat pertanyaan agar Anda dapat mendefinisikan peluang bersyarat. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut.

1. Kejadian-kejadian yang bagaimanakah dapat membentuk kejadian bersyarat?
2. Bagaimana menentukan peluang dari kejadian bersyarat?

Tuliskan pertanyaan Anda pada kotak di bawah ini.

Ayo Menggali Informasi

Anda pasti membutuhkan informasi untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan yang sudah Anda buat agar dapat lebih memahami tentang peluang bersyarat dan menentukan rumus peluang bersyarat. Di bawah ini Anda diminta untuk melengkapi beberapa kegiatan.

Contoh 3.2.8

Sebuah kartu diambil dari satu set kartu remi. Berapa peluang bahwa kartu yang terambil lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 10 berwarna merah?
Misal:
C = Kejadian terambilnya kartu yang berwarna merah
D = Kejadian terambilnya kartu yang lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 10

Kejadian ini merupakan kejadian bersyarat karena terambilnya kartu yang lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 10 merupakan kartu yang berwarna merah. Peluang dari kejadian terambilnya kartu yang lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 10 yang berwarna merah didapat dengan cara:

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P(C)\ P(D|C) \\ &= \left(\frac{26}{52}\right)\left(\frac{\dots}{\dots}\right) \\ &= \frac{\dots}{\dots} \\ &= \frac{\dots}{\dots} \end{aligned}$$

Jadi peluang terambilnya kartu yang lebih besar dari 2 dan lebih kecil dari 10 yang berwarna merah adalah ______________

Contoh 3.2.9

Formasi manajemen dari 200 orang eksekutif suatu perusahaan ditunjukkan sebagai berikut:

	Pria (P)	Wanita (W)
Eksekutif Puncak (EP)	18	2
Eksekutif Menengah (EM)	36	24
Eksekutif Bawah (EB)	24	96

1. Jika dari 200 eksekutif tersebut diambil secara acak seorang eksekutif, berapa peluang terpilih eksekutif pria atau eksekutif puncak?

Penyelesaian

Peluang terpilih eksekutif pria atau eksekutif puncak didapat dengan cara:

$$P(P \cup EP) = P(P) + P(EP) - P(P \cap EP)$$
$$= \frac{78}{200} + \frac{20}{200} - \frac{...}{...}$$
$$= \frac{...}{...}$$
$$= \frac{2}{5}$$

Jadi peluang terpilih eksekutif pria atau eksekutif puncak adalah ______________

2. Dipilih 2 orang eksekutif secara acak, berapa peluangnya terpilih seorang eksekutif pria dan seorang eksekutif wanita?

Penyelesaian

Peluang terpilih seorang eksekutif pria dan seorang eksekutif wanita dari pemilihan secara acak dua orang eksekutif didapat dengan cara:

$$P(P \cap W) = P(P)\,P(W)$$
$$= \left(\frac{78}{200}\right)\left(\frac{...}{...}\right)$$
$$= \frac{9.516}{40.000}$$
$$= \frac{...}{...}$$

Jadi peluang terpilih seorang eksekutif pria dan seorang eksekutif wanita dari pemilihan secara acak dua orang eksekutif adalah

____

3. Berapa peluang terpilih eksekutif pria pada pilihan pertama dan terpilih eksekutif pria lagi pada pilihan kedua?

Penyelesaian

Peluang terpilih eksekutif pria dari dua kali pemilihan berturut-turut didapat dengan cara:

$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)\,P(P_2|P_1)$$

$$= \left(\frac{78}{200}\right)\left(\frac{\dots}{\dots}\right)$$

$$= \frac{\dots}{\dots}$$

$$= \frac{15}{10}$$

Jadi peluang terpilih eksekutif pria dari dua kali pemilihan berturut-turut adalah _________

Tuliskan kesimpulan Anda tentang peluang bersyarat dan rumus peluang bersyarat berdasarkan jawaban dari kegiatan di atas pada kotak di bawah ini.

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap. Tuliskan hasil diskusi pada kotak di bawah ini.

Latihan Soal 3.2

1. Sekelompok ahli biologi merencanakan akan mengadakan penelitian untuk mempelajari serangga yang membahayakan di Sulawesi Tenggara. A merupakan kejadian bahwa mereka akan menghadapi cuaca buruk, B merupakan kejadian bahwa mereka akan menghadapi masalah dengan lembaga pemerintahan setempat, dan C merupakan kejadian bahwa mereka akan menghadapi kesulitan dengan alat-alat fotografi mereka. Tentukan 3 kejadian majemuk yang mungkin terjadi!
2. Sebuah kota memiliki satu unit kendaraan pemadam kebakaran dan satu unit kendaraan ambulance yang tersedia dalam keadaan darurat. Peluang bahwa unit kendaraan pemadam kebakaran siap apabila diperlukan adalah 0,98 dan peluang bahwa unit kendaraan ambulance siap apabila diperlukan adalah 0,92. Apabila terjadi peristiwa terbakarnya suatu gedung di kota tersebut, berapa peluang kedua kendaraan tersebut siap beroperasi?
3. Jika diketahui peluang bahwa Amir masih hidup 20 tahun lagi adalah 0,7 dan peluang bahwa Badu masih hidup 20 tahun lagi adalah 0,9, berapa peluang bahwa keduanya tidak hidup dalam 20 tahun lagi?

4. Sebuah tas berisi 15 spidol yang terdiri dari 8 spidol merah, 4 spidol biru, dan 3 spidol putih. Spidol pertama diambil secara acak dan tidak dikembalikan, selanjutnya diambil spidol kedua secara acak dan tidak dikembalikan.
   a. Hitunglah peluang apabila spidol yang terambil warna merah dan biru!
   b. Apabila spidol ketiga diambil secara acak, hitunglah peluang bahwa tidak satupun dari tiga spidol tersebut berwarna putih!

5. Terdapat 50 lembar undian dengan nomor 1, 2, 3, . . . , 50, terdapat 3 nomor yang berisi hadiah. Apabila seorang panitia mengambil lembar undian dua kali berturut-turut, berapa peluang panitia tersebut akan mendapatkan lembar undian yang keduanya berisi hadiah?

Uji Kompetensi

1. Dalam suatu kelas yang terdiri atas 15 siswa putri dan 12 siswa putra akan dipilih sepasang ganda campuran (putra dan putri) untuk mewakili kelas. Berapa banyak cara sepasang ganda campuran itu?

2. Ada berapa banyak susunan berbeda yang terdiri atas 3 huruf dari kata ABRACADABRA?

3. a. Tentukan banyaknya cara 3 orang duduk pada 4 kursi yang terletak sebaris.
   b. Tentukan banyaknya cara 5 orang duduk pada 5 kursi yang terletak sebaris.
   c. Ada 8 kursi yang disusun dalam 2 baris yaitu baris A dan baris B. Masing-masing baris terdiri atas 4 kursi. Tentukan banyaknya cara mengatur 8 orang untuk duduk jika 3 orang tertentu harus duduk di baris A.

4. Suatu rak buku memuat 7 buku berbeda yang terdiri atas 4 buku dikarang oleh Amir dan 3 buku dikarang oleh Hasan. Tentukan banyaknya susunan buku jika

a. tidak ada dua buku dengan pengarang sama yang saling berdekatan,
b. dua buku pertama di ujung kiri dikarang oleh pengarang yang sama,
c. buku pertama di ujung kiri dan buku terakhir di ujung kanan dikarang oleh pengarang yang sama.

5. Dalam suatu pertemuan kecil yang dihadiri oleh 3 orang pria dan 3 orang wanita, mereka duduk dalam meja bundar.
   a. Berapa banyak cara mereka duduk.
   b. Berapa banyak cara mereka duduk apabila semua wanita duduk berdekatan.
   c. Berapa banyak cara mereka duduk jika tidak ada dua wanita yang berdekatan.

6. Suatu toko menjual 100 ban mobil yang terdiri dari 17 ban merk Uniroyal, 22 ban merk Goodyear, 3 ban merk General, 29 ban merk Continental, 21 ban merk Bridgestone, dan 8 ban merk Amstrong. Hitunglah peluang ban yang terjual:
   a. Ban mobil merk Goodyear atau Bridgestone.
   b. Ban mobil merk Uniroyal, Continental, atau Bridgestone .

7. Sebuah dompet berisi 4 buah uang logam seribu rupiah dan 3 buah uang logam lima ratus rupiah. Dompet yang kedua berisi 3 buah uang logam seribu rupiah dan 5 buah uang logam lima ratus rupiah. Sebuah uang logam diambil dari dompet pertama dan dimasukkan pada dompet kedua. Jika kemudian diambil sekeping uang logam dari dompet kedua, berapa peluangnya bahwa uang logam yang diambil dari dompet kedua tersebut adalah uang logam lima ratus rupiah?

8. Diketahui bahwa kelas mata kuliah ”Metodologi Riset” diikuti oleh 10 mahasiswa semester V, 30 mahasiswa semester VII, dan 10 mahasiswa semester IX. Hasil nilai akhir menunjukkan bahwa 3 mahasiswa semester V, 10 mahasiswa semester VII, dan 5 mahasiswa semester IX mendapatkan nilai A. Bila seorang mahasiswa dipilih secara acak diketahui mendapat nilai A, berapa peluang mahasiswa tersebut merupakan mahasiswa semester IX?

9. Pada suatu penelitian untuk mengetahui pengaruh merokok terhadap kesehatan paru-paru, telah diwawancarai sebanyak 120 orang. Berdasarkan hasil penelitian ini diketahui bahwa 20 orang tidak menghisap rokok dan dari yang menghisap rokok diketahui 75% mengidap penyakit paru-paru. Bagi yang tidak merokok diketahui bahwa yang mengidap penyakit paru-paru adalah 25%. Apabila secara acak dipilih seorang di antara mereka, berapa peluang:
   a. Diperoleh orang yang tidak merokok tetapi mengidap penyakit paru-paru
   b. Diperoleh orang yang merokok atau orang yang mengidap penyakit paru-paru
   c. Diperoleh orang yang tidak mengidap penyakit paru-paru dari orang yang tidak merokok
10. Pemain A dan B bermain catur 12 babak dengan 6 kali dimenangkan oleh pemain A, 4 kali dimenangkan oleh pemain B, dan 2 kali seri. Dalam pertandingan sebanyak 3 babak, hitunglah peluang apabila:
   a. Pemain A dan B menang bergantian
   b. Pemain B menang paling sedikit satu babak

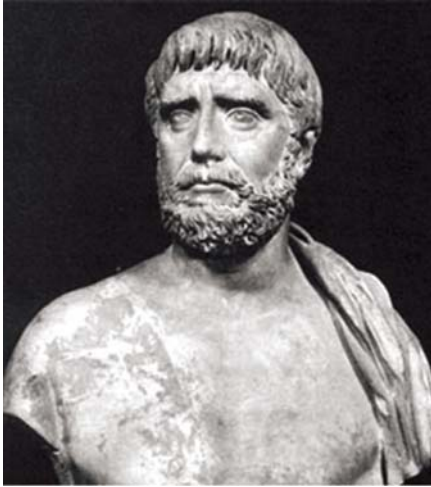
Kekongruenan dan Kesebangunan (Pengayaan)

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
3.4 Menganalisis hubungan kesebangunan dan kekongruenan antarbangun datar dengan menggunakan aturan sinus dan kosinus serta sifat-sifat transformasi geometri. 4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hubungan kesebangunan dan kekongruenan antarbangun datar dengan menggunakan aturan sinus dan kosinus serta sifat-sifat transformasi geometri.	Melalui pembelajaran Kesebangunan dan Kekongruenan, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengamati, mempertanyakan fakta dan informasi, menyelidiki fakta kesebangunan dan kekongruenan dan mengasosiasi informasi menggunakan aturan sinus kosinus serta sifat-sifat transformasi dan menyimpulkan temuannya terkait konsep kesebangunan dan kekongruenan bangun datar. 2. Menerapkan konsep kesebangunan dan kekongruenan menyelesaikan masalah terkait konsep tersebut.

Istilah Penting

- *Kesebangunan*
- *Kekongruenan*
- *Segibanyak*
- *Segitiga*
- *Aturan Sinus dan Kosinus*
- *Transformasi*

Biografi Thales

Thales lahir di sekitar pertengahan 624 SM di kota Miletus yang terletak di pantai barat Asia Kecil. Thales dikenal sebagai seorang filusuf Yunani, matematikawan, dan ilmuwan. Ia menemukan konsep geometri garis, sehingga diberikan apresiasi atas karya-karyanya, salah satu karyanya adalah geometri abstrak.

Thales pergi ke Mesir dan belajar dengan para imam, di mana dia mendalami ilmu matematika dan membawa pengetahuan ini kembali ke Yunani. Thales juga melakukan penelitian geometris dan menerapkan pemahamannya tentang geometri untuk menghitung jarak dari pantai ke kapal di laut. Hal ini sangat penting bagi orang-orang Yunani, apakah kapal datang untuk berdagang atau untuk melakukan penyerangan.

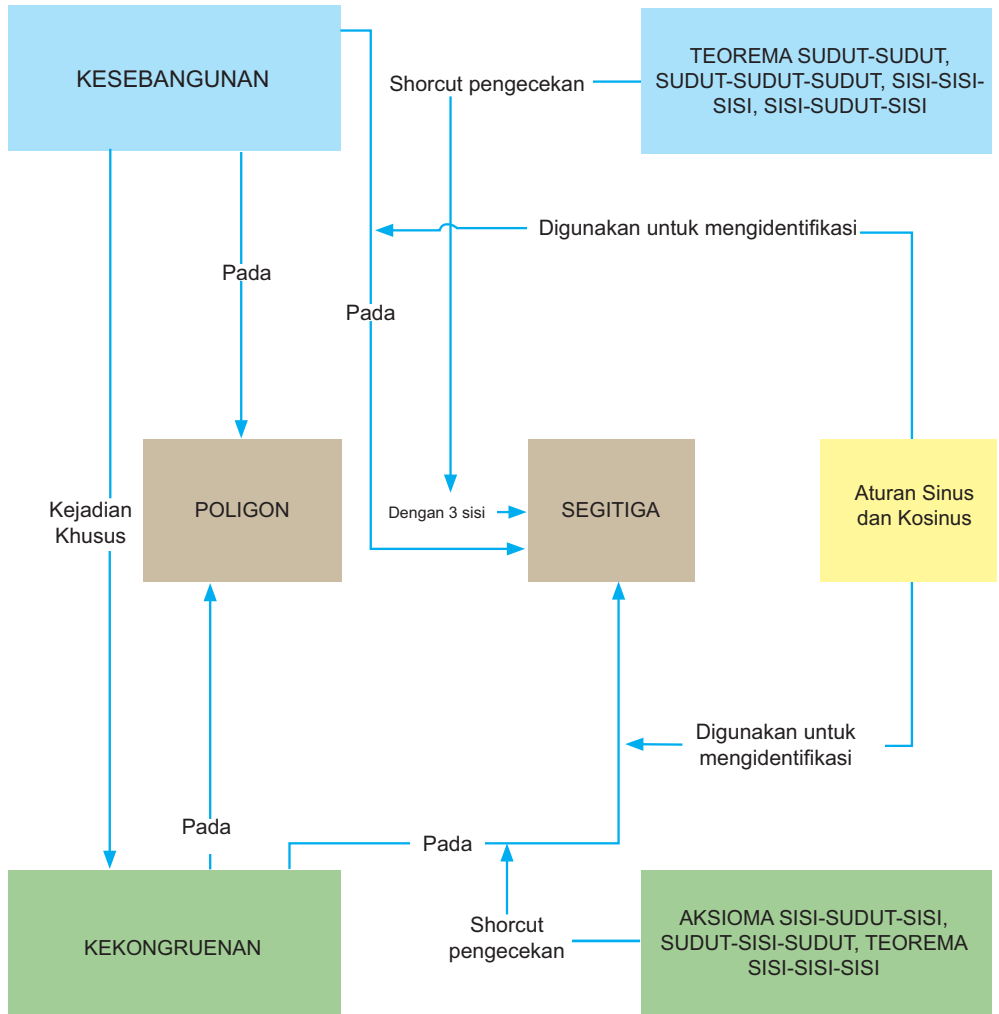
Beberapa karya Thales berupa 5 teorema dalam geometri yang cukup populer, yakni:

- Sebuah lingkaran dibagi menjadi dua bagian yang sama oleh diameternya.
- Besar kedua sudut pada kaki-kaki segitiga sama kaki adalah sama.
- Jika dua garis lurus berpotongan, ukuran sudut bertolak belakang yang terbentuk sama besar.
- Jika satu segitiga memiliki dua sudut dan satu sisi yang berukuran sama dengan segitiga lain, maka kedua segitiga tersebut kongruen.
- Sebarang sudut dalam pada setengah lingkaran adalah sudut siku-siku. Hal ini dikenal sebagai Teorema Thales.

Sumber : *http://www.mathopenref.com/thales.html*

Beberapa hikmah yang mungkin bisa kita petik, adalah:

1. Orang dihargai karena karya-karyanya yang memberikan kebermanfaatan buat yang lain.
2. Dengan ilmu seseorang bisa memberikan solusi terhadap permasalahan yang ada.
3. Matematika, dalam hal ini geometri, banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari.

B. Diagram Alur Konsep

C. Materi Pembelajaran

Subbab 4.1 Kekongruenan

Apakah ada jalan pintas untuk mengecek kekongruenan?

Seorang kontraktor bangunan baru saja mengangkat dua paket segitiga berukuran besar untuk menopang atap suatu aula pertunjukan. Sebelum penderek menggereknya ke tempat yang diinginkan, kontraktor tersebut butuh memastikan apakah dua segitiga tersebut sama persis/kongruen. Haruskah kontraktor tersebut mengukur dan membandingkan semua bagian-bagian dari dua segitiga tersebut?

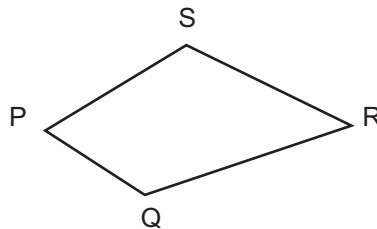
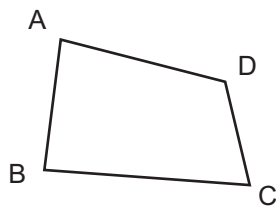
Kegiatan Apersepsi

Untuk dapat melakukan aktivitas pembelajaran untuk membahas tentang kekongruenan bangun datar, Anda perlu mengingat kembali beberapa konsep geometri yang terkait dengan konsep tersebut. Untuk mengetahui apakah Anda sudah memiliki pengetahuan prasyarat, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut;

1. Apa yang bisa Anda simpulkan terkait dua ruas garis $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ yang kongruen, ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$)?

2. Apa yang bisa Anda simpulkan terkait dua sudut $\angle A$ dan $\angle B$ yang kongruen, $\angle A \cong \angle B$?

Kegiatan 4.1.1: Menentukan Pasangan-Pasangan Sisi dan Sudut yang Bersesuaian atau Berkorespondensi dari Dua Segibanyak.

Perhatikan segiempat ABCD dan segiempat PQRS dan informasi yang diberikan.

Informasi:

- Terdapat korespondensi satu-satu antara segiempat ABCD dan segiempat PQRS atau ditulis ABCD↔PQRS, dengan A↔P, B↔Q, C↔R, D↔S.
- Sisi ($\overline{AB}$) dan sisi ($\overline{PQ}$) adalah pasangan sisi yang bersesuaian/ berkorespondensi.

  Sudut $\angle A$ dan sudut $\angle P$ adalah pasangan sudut yang bersesuaian/ berkorespondensi.

  Bangun datar yang dimaksud dalam buku ini adalah segibanyak.

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

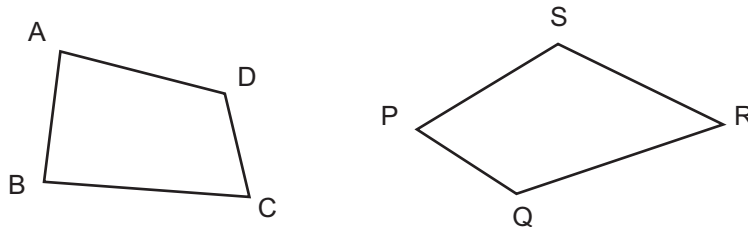
Ayo Menanya

Berdasarkan hasil pengamatan Anda, tulis pertanyaan-pertanyaan terkait informasi tentang dua segibanyak yang berkorespondensi dan ajukan jawaban sementara/konjektur untuk pertanyaan-pertanyaan yang diajukan teman Anda.

Ayo Mengumpulkan Informasi dan Menalar

Kesimpulan sementara yang Anda ajukan pada sesi sebelumnya perlu di uji kebenarannya. Begitu juga pertanyaan-pertanyaan yang Anda ajukan perlu dicari jawabannya. Untuk memenuhi kebutuhan tersebut, Anda perlu mengumpulkan informasi untuk dianalisis atau dikait-kaitkan satu dengan lainnya. Hasil analisa informasi tersebut menjadi jawaban atas pertanyaan atau kesimpulan dari konjektur yang dibuat. Informasi-informasi tersebut bisa Anda peroleh di bagian kegiatan Ayo Mengumpulkan Informasi dan Menalar ini.

Anda juga bisa memperkaya informasi dengan mengakses internet atau membaca buku-buku referensi lain. Anda juga akan diminta menjawab pertanyaan-pertanyaan yang diberikan pada bagian ini. Jawaban-jawaban tersebut akan menjadi informasi-informasi baru yang bisa Anda analisis/kaitkan.

Perhatikan lagi bangun datar segiempat ABCD dan segiempat PQRS serta informasi bahwa terdapat korespondensi satu-satu antar kedua segiempat tersebut.

Informasi:

- Terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik sudut pada segiempat ***ABCD*** dan segiempat ***PQRS*** atau ditulis ***ABCD↔PQRS***, dengan ***A↔P***, ***B↔Q***, ***C↔R***, ***D↔S*** .
- Sisi $\overline{AB}$ dan sisi $\overline{PQ}$ adalah sisi-sisi yang bersesuaian/berkorespondensi, ditulis $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$.
- Sudut ∠A dan sudut ∠P adalah sudut-sudut yang bersesuaian/berkorespondensi, ditulis ∠A↔∠P.

Perhatikan juga informasi berikut terkait ilustrasi sepasang sudut/sisi dari dua segibanyak yang bersesuaian.

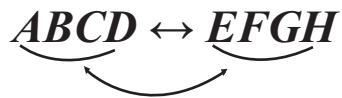
Misal diketahui ***ABCD↔EFGH***, di mana *A*↔*E*, *B*↔*F*, *C*↔G, D↔H.

Karena *A*↔*E* dan *B*↔*F* maka sisi *AB* akan bersesuaian dengan sisi *EF* dan ∠*A* bersesuaian dengan ∠*E*, ∠*B* bersesuaian dengan ∠*F*.

Jika diilustrasikan, seperti pada gambar berikut.

Dengan cara yang sama,

Karena *A*↔*E* dan *D*↔*H* maka sisi *AD* akan bersesuaian dengan sisi *EH* dan ∠*A* bersesuaian dengan ∠*E*, ∠*D* berseusuaian dengan ∠*H*.

Jika diilustrasikan, seperti pada gambar berikut.

Selanjutnya, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apakah banyaknya titik sudut dari pasangan segibanyak tersebut sama?

2. Apakah bisa dibuatkan korespondensi satu-satu pada titik-titik sudutnya? Tuliskan titik-titik sudut yang berkorespondensi satu-satu.

3. Tuliskan nama sisi dan sudut dari masing-masing bangun datar tersebut!

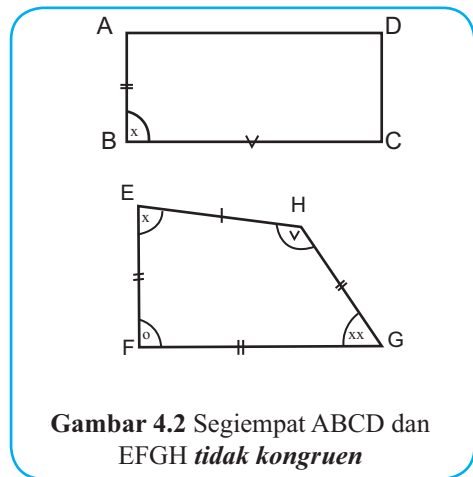
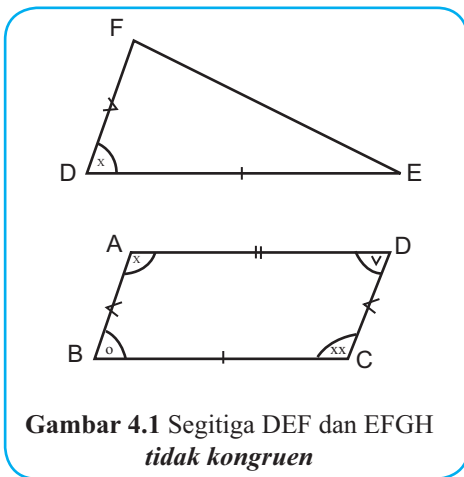
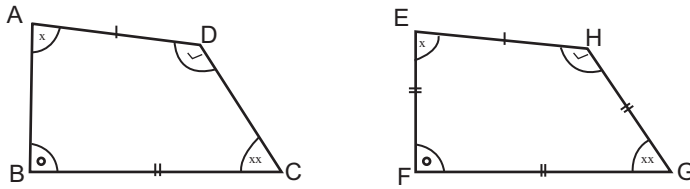
4. Apakah bisa dibuatkan korespondensi satu-satu (memasangkan satu-satu) masing-masing sisi dan sudut pada bangun ABCD ke bangun PQRS?

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh, buatlah kesimpulan terkait kapan sepasang segibanyak bisa dibuatkan korespondensi (terdapat korespondensi) antara titik-titik sudutnya; bagaimana menentukan sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian?

Kegiatan 4.1.2: Kekongruenan Dua Segibanyak

Perhatikan sajian informasi berikut:

Gambar 4.1 Segitiga DEF dan EFGH *tidak kongruen*

Gambar 4.2 Segiempat ABCD dan EFGH ***tidak kongruen***

Gambar 4.3 Segiempat *ABCD* dan *EFGH* **kongruen**, dapat ditulis $ABCD \cong EFGH$

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari hasil pengamatan, buatlah kesimpulan awal terkait kekongruenan antara dua segibanyak atau tulis semua pertanyaan yang ingin Anda ketahui terkait informasi tersebut.

Perhatikan kembali informasi pada sesi kegiatan mengamati. Untuk memperkaya informasi, Anda bisa mencari informasi pendukung dengan mengakses internet atau membaca buku-buku referensi. Informasi yang akan dianalisis juga bisa diperoleh dari jawaban atas pertanyaan-pertanyaan yang diberikan pada bagian ini.

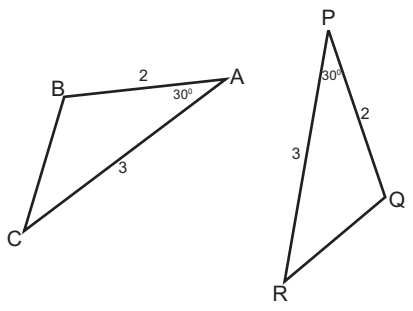
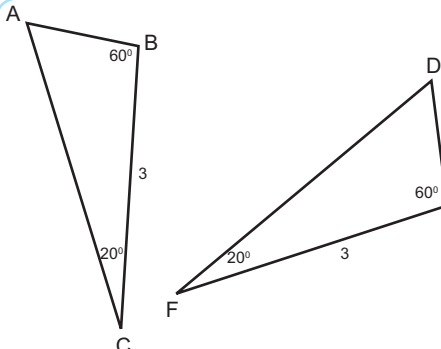
Untuk masing-masing pasangan segibanyak yang disajikan pada kegiatan mengamati, lakukan penyelidikan dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apakah terdapat korespondensi antara titik-titik sudut dari dua segibanyak tersebut? Jika iya, sebutkan semua titik-titik sudut yang bersesuaian, semua pasangan sisi yang bersesuaian dan semua sudut-sudut yang bersesuaian. Jika tidak, berikan alasannya.

2. Apakah semua sisi-sisi yang bersesuaian kongruen?

3. Apakah semua sudut-sudut yang bersesuaian kongruen?

Kaitkan/hubungkan jawaban dari pertanyaan di atas dengan informasi kekongruenan pada masing-masing pasangan segibanyak tersebut.
Buatlah kesimpulan tentang kekongruenan dua bangun datar segibanyak untuk mengklarifikasi konjektur atau untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan yang Anda ajukan pada sesi menanya.

Presentasikan/bandingkan kesimpulan yang Anda buat sendiri atau secara berkelompok dari hasil aktivitas Kegiatan 4.1.2 di depan kelas untuk memperoleh kesimpulan yang lengkap dan benar. Tuliskan hasil presentasi dan diskusi kelasnya.

Catatan: kesimpulan ini selanjutnya dikenal sebagai definisi kekongruenan segibanyak.

Kegiatan 4.1.3: Menentukan Kekongruenan Dua Segitiga
Berdasarkan kesimpulan dari Kegiatan 4.1.2, Anda sudah dapat mengidentifikasi kapan dua bangun datar kongruen. Anda tentu bisa menggunakan kesimpulan tersebut untuk mengidentifikasi kapan dua segitiga dikatakan kongruen karena segitiga merupakan salah satu contoh segibanyak.

Perhatikan informasi berikut:

Berdasarkan gambar di atas, diketahui bahwa panjang sisi AB sama dengan panjang sisi PQ dan panjang sisi AC sama dengan panjang sisi PR. Ukuran sudut A dan P juga sama besar, maka dapat disimpulkan segitiga ABC dan PQR ***kongruen***, ditulis $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

Berdasarkan gambar di atas, diketahui bahwa panjang sisi BC sama dengan panjang sisi EF dan. Ukuran sudut B sama dengan sudut E dan ukuran sudut C sama dengan ukuran sudut F, maka dapat disimpulkan segitiga ABC dan DEF ***kongruen,*** ditulis $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari hasil pengamatan, buatlah kesimpulan awal terkait kekongruenan antara dua segitiga atau tulis semua pertanyaan yang ingin Anda ketahui terkait informasi tersebut.

Untuk bisa mengecek kebenaran konjektur yang Anda buat atau menjawab pertanyaan Anda, lakukan aktivitas penyelidikan berikut:

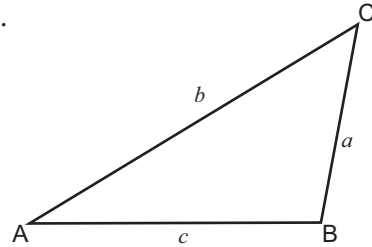
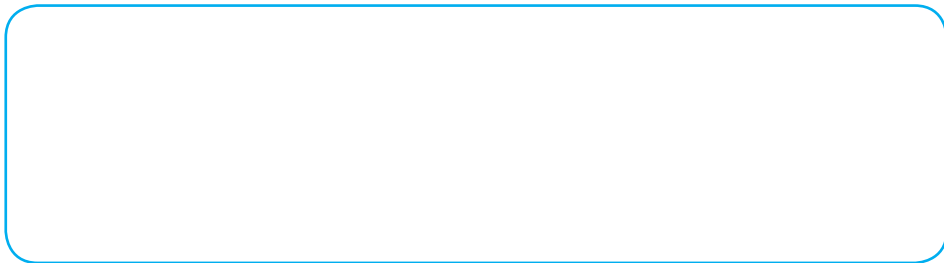
Penyelidikan 4.1.3.1: Menentukan Kekongruenan Dua Segitiga (***Sisi-Sudut-Sisi***) melalui Pengukuran.

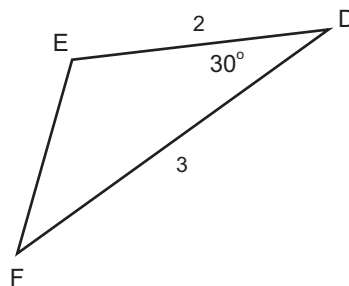
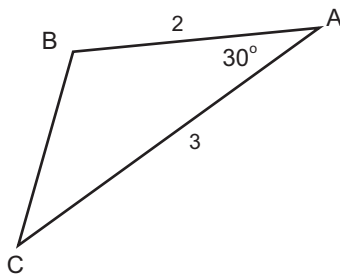
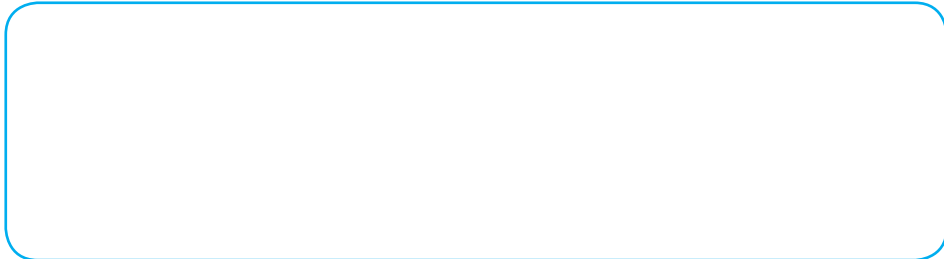
Gambar dua segitiga yang berbeda. Dua sisi segitiga pertama kongruen dengan 2 sisi segitiga kedua. Satu sudut yang dibentuk oleh kedua sisi tersebut pada segitiga pertama sama besar dengan sudut yang juga dibentuk oleh dua sisi yang kogruen pada segitiga kedua. Ikuti langkah-langkah berikut:

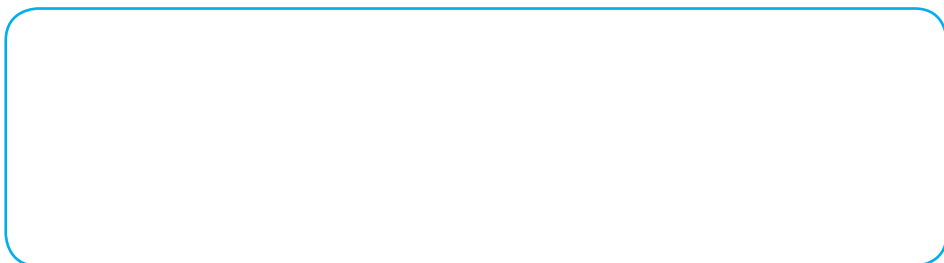
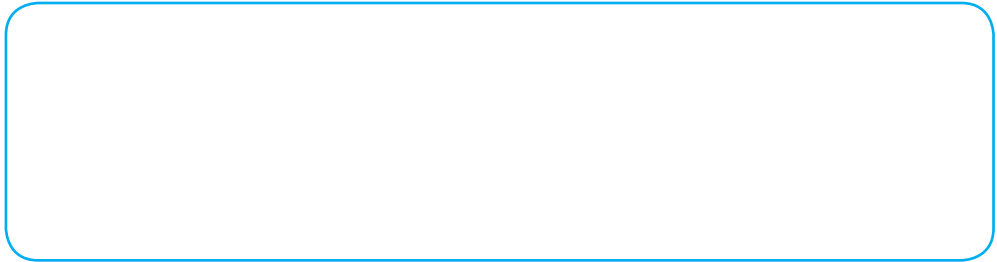
1. Gambar segitiga sebarang ABC.
2. Gambar segitiga kedua, DEF, yang panjang dua sisi segitiga pertama sama dengan dua sisi segitiga kedua dan sudut yang dibentuk kedua sisi tersebut pada kedua segitiga sama besar (kongruen).
3. Ukurlah panjang sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian. Diskusikan hasil yang Anda dapat dengan hasil teman sebelah Anda.

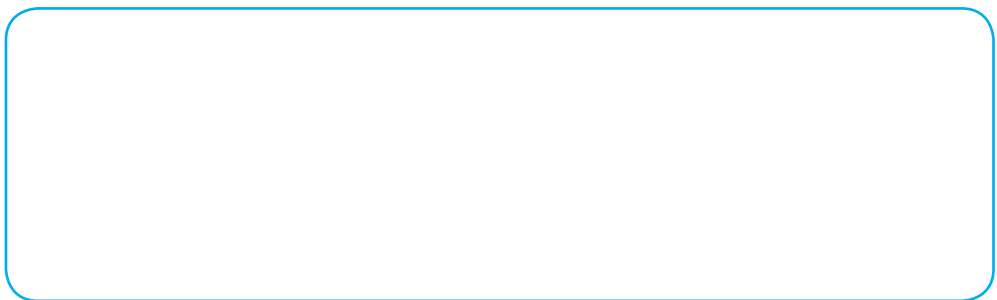
Penyelidikan 4.1.3.2: Menentukan Kekongruenan Dua Segitiga (***Sisi-Sudut-Sisi***) dengan Menerapkan Aturan Sinus dan Kosinus.

Untuk melakukan Penyelidikan 4.1.3.2, terlebih dahulu Anda perlu mengingat kembali tentang aturan sinus dan kosinus yang berlaku pada segitiga. Untuk itu, jawablah pertanyaan dari masalah berikut ini.

Misalkan suatu segitiga ΔABC dengan panjang sisi AB = c, BC = a, dan CA = b, dan sudut-sudutnya dalah $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle C$, seperti pada gambar di samping.

Tulis kesamaan rasio yang berlaku pada segitiga, yang dikenal sebagai ***aturan sinus*** dan ***kosinus.*** Jika lupa, Anda bisa mencari informasi tersebut dengan membaca buku atau mengakses internet.

Setelah Anda sudah bisa mengingat dan memahami ***aturan sinus*** dan ***kosinus*** yang berlaku pada suatu segitiga lakukan penyelidikan berikut.

Misalkan diketahui segitiga ABC dengan ukuran panjang sisi AB = 2, AC=3, dan $\angle$A = 30° dan segitiga DEF dengan panjang sisi DE = 2, DF = 3, dan $\angle$ D= 30°.

Lakukan pengecekan dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Tentukan ukuran sisi yang belum diketahui pada masing-masing segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan ***aturan kosinus***.

   Setelah kalian sudah bisa mengingat dan memahami ***aturan sinus*** dan ***kosinus*** yang berlaku pada suatu segitiga lakukan penyelidikan berikut.

2. Tentukan ukuran dua sudut yang belum diketahui pada masing-masing segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan ***aturan kosinus*** atau ***aturan sinus***.

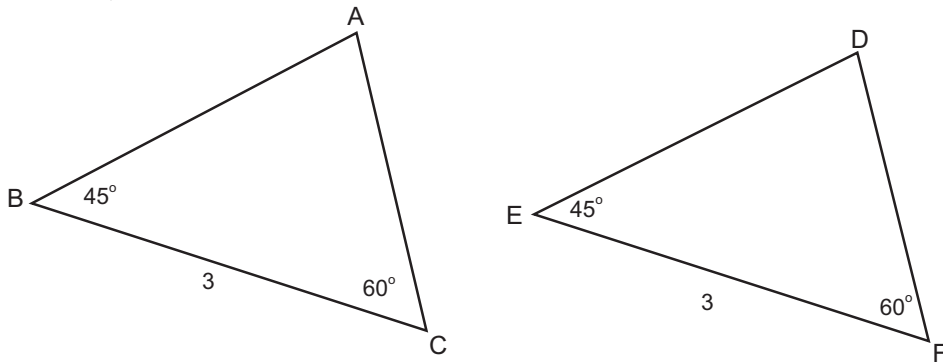
3. Bandingkan ukuran semua sudut-sudut yang bersesuaian dan sepasang sisi yang bersesuaian kedua segitiga tersebut. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.

Tuliskan kesimpulan tentang hubungan kekongruenan dua segitiga yang dua sisi segitiga pertama kongruen dengan 2 sisi segitiga kedua serta satu sudut yang dibentuk oleh kedua sisi tersebut pada segitiga pertama sama besar dengan sudut yang juga dibentuk oleh dua sisi yang kongruen pada segitiga kedua.

Penyelidikan 4.1.3.3: Menentukan Kekongruenan Dua Segitiga (***Sudut-Sisi-Sudut***) melalui Pengukuran.

Gambar dua segitiga yang berbeda. Dua sudut segitiga pertama kongruen dengan 2 sudut segitiga kedua. Satu sisi diantara (kaki sudut persekutuan) kedua sudut tersebut pada segitiga pertama sama besar dengan satu sisi diantara (kaki sudut persekutuan) kedua sudut tersebut pada segitiga kedua. Ikuti langkah-langkah berikut:

1. Gambar segitiga sebarang ABC.
2. Gambar segitiga kedua, DEF, dimana ukuran dua sudut segitiga pertama sama dengan dua sudut segitiga kedua dan sisi yang merupakan sinar/kaki dari kedua sudut tersebut pada kedua segitiga sama panjang.
3. Ukurlah panjang sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian. Diskusikan hasil yang Anda dapat dengan hasil teman sebelah Anda.

Penyelidikan 4.1.3.4: Menentukan Kekongruenan Dua Segitiga (Sudut-Sisi-Sudut) dengan Menerapkan ***Aturan Sinus*** dan ***Kosinus.***

Misalkan diketahui segitiga ABC dengan ukuran panjang sisi BC = 3, $\angle B = 60°$ dan $\angle C = 45°$ dan segitiga DEF dengan panjang sisi EF = 3, $\angle E = 60°$ dan $\angle F = 45°$,

Lakukan pengecekan dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Tentukan ukuran sisi yang belum diketahui pada masing-masing segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan ***aturan sinus***.

2. Tentukan ukuran sudut yang belum diketahui pada masing-masing segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan ***sifat ukuran sudut pada segitiga*** atau ***aturan sinus***.

3. Bandingkan ukuran semua sudut-sudut yang bersesuaian dan sepasang sisi yang bersesuaian kedua segitiga tersebut. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.

Tuliskan kesimpulan yang didapat terkait kekongruenan dua segitiga yang ukuran sudut-sisi-sudutnya diketahui.

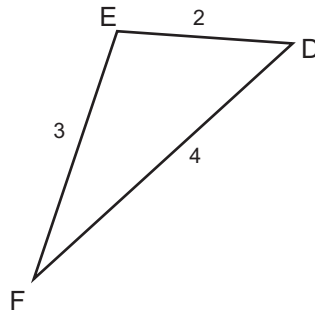
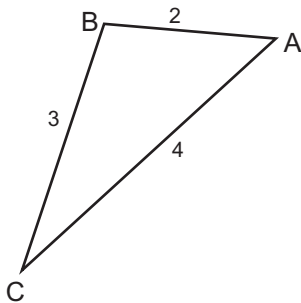
Penyelidikan 4.1.3.5: Menentukan Kekongruenan Dua Segitiga (***Sisi-Sisi-Sisi***) dengan Pengukuran.

Gambar dua segitiga yang berbeda. Ketiga sisi yang bersesuaian pada segitiga pertama dan segitiga kedua kongruen. Ikuti langkah-langkah berikut.

1. Gambar segitiga sebarang ABC.
2. Gambar segitiga kedua, DEF, sedemikian sehingga $AB \cong DE$; $BC \cong EF$, dan $CA \cong FD$, dengan cara berikut.
    1) Gambar garis DE sehingga panjangnya sama dengan panjang garis AB.
    2) Buat lingkaran dengan pusat titik D dan jari-jari sebesar ukuran panjang sisi AC.
    3) Buat lingkaran dengan pusat di titik E dan jari-jari sebesar ukuran garis BC.
    4) Salah satu titik perpotongan dua lingkaran tersebut tandai sebagai titik F.
    5) Buat garis DF dan EF, maka akan terbentuk segitiga DEF yang ketiga sisinya kongruen dengan ketiga sisi pada segitiga ABC.

3. Ukurlah sudut-sudut yang bersesuaian. Diskusikan hasil yang Anda dapat dengan hasil teman sebelah Anda.

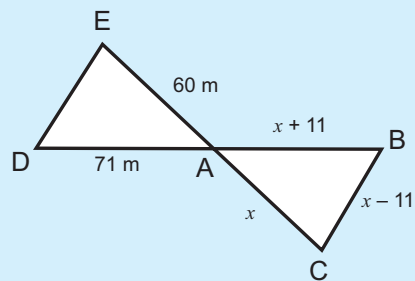
Penyelidikan 4.1.3.6: Menentukan Kekongruenan Dua Segitiga (Sisi-Sisi-Sisi) dengan Menerapkan ***Aturan Kosinus*.**

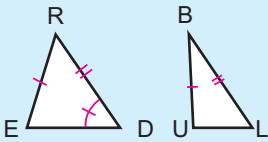
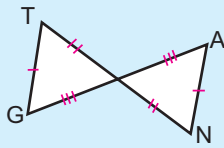
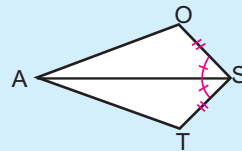
Misalkan diketahui segitiga ABC dengan ukuran panjang sisi AB = 2, BC = 3, dan CA = 4 dan segitiga DEF dengan panjang sisi DE = 2, EF = 3, dan FD = 4, lakukan pengecekan dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Tentukan ukuran ketiga sudut pada masing-masing segitiga ABC dan DEF dengan menggunakan ***aturan kosinus***.

2. Bandingkan ukuran semua sudut-sudut yang bersesuaian. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.

Kaitkan/hubungkan informasi tentang definisi kekongruenan dua segibanyak dengan hasil penyelidikan pada Kegiatan 4.1.3. Tuliskan kesimpulan tentang kekongruenan dua segitiga yang didapat.

Masalah 4.1.1

Perhatikan bangun datar di samping: Jika keliling segitiga ΔABC adalah 180 cm, apakah segitiga ΔABC kongruen dengan segitiga ΔADE? Mengapa?

Masalah 4.1.2

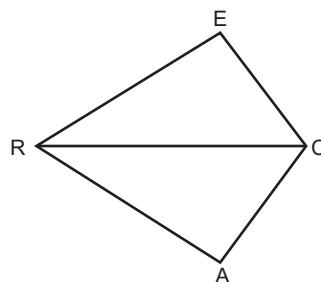
Tentukan segitiga yang kongruen dengan segitiga yang diberikan berikut ini. Tuliskan konjektur kekongruenan yang digunakan untuk menetapkan jawaban Anda. Jika tidak bisa menentukan segitiga yang mana yang kongruen, tuliskan alasannya.

a. $\Delta RED \cong \Delta \underline{?}$ b. $\Delta GIT \cong \Delta \underline{?}$ c. $\Delta SAT \cong \Delta \underline{?}$

Ayo Mengomunikasikan

Presentasikan/bandingkan kesimpulan yang kalian buat sendiri atau secara berkelompok dari hasil aktivitas Kegiatan 4.1.3 di depan kelas untuk diperoleh kesimpulan yang lengkap dan benar. Tuliskan hasil presentasi dan diskusi kelasnya.

Catatan: Kesimpulan ini tentang **Konjektur Kekongruenan segitiga** (***Sisi-Sudut-Sisi***), (***Sisi-Sisi-Sisi***) dan (***Sudut-Sisi-Sudut***)

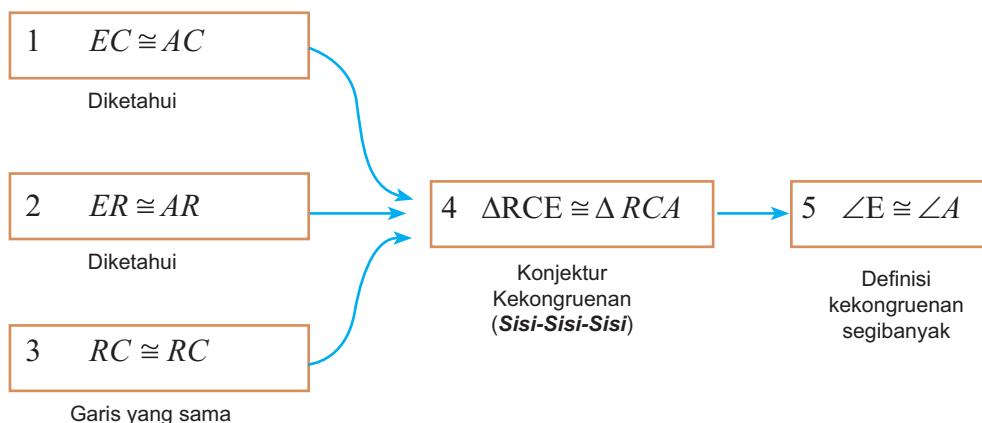
Kegiatan 4.1.4: Alur Berpikir dalam Pembuktian Deduktif

Pada kegiatan sebelumnya Anda telah memperoleh kesimpulan terkait definisi kesebangunan segibanyak dan beberapa konjektur terkait kesebangunan segibanyak maupun segitiga melalui kegiatan penyelidikan baik melalui pengukuran maupun penerapan aturan sinus dan kosinus. Selanjutnya Anda akan melakukan kegiatan matematika yang lebih menekankan pada pembuktian deduktif. Untuk medukung kemampuan Anda dalam menyusun pembuktian deduktif, Anda akan diajak untuk berlatih membuat kerangka atau alur pembuktiannya sehingga lebih mudah menyusunannya menjadi struktur pembuktian yang sistematis.

Perhatikan contoh penyelesaian masalah berikut: Pada gambar di samping, $EC \cong AC$, $ER \cong AR$, apakah $\angle E \cong \angle A$? Jika kongruen, tuliskan alur pembuktian untuk menjelaskan alasannya.

Penyelesaian:

Diketahui: $EC \cong AC$ dan $ER \cong AR$

Tunjukkan: $\angle E \cong \angle A$

Alur pembuktian:

Bukti formal:

No.	Pernyataan	Alasan
1.	$EC \cong AC$	Diketahui
2.	$ER \cong AR$	Diketahui
3.	$RC \cong RC$	Kesamaan garis (refleksi)
4.	$\Delta RCE \cong \Delta RCA$	Konjektur kekongruenan Sisi-Sisi-Sisi
5.	$\angle E \cong \angle A$	Definisi Kekongruenan segibanyak

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

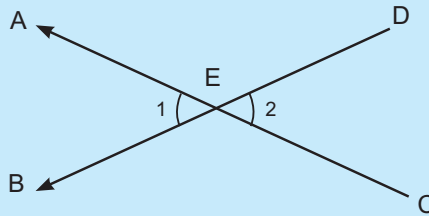
Ayo Menanya

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari hasil pengamatan, buatlah kesimpulan awal terkait alur pembuktian atau tulis semua pertanyaan yang ingin Anda ketahui terkait informasi tersebut.

Untuk bisa mengecek kebenaran konjektur yang kalian buat atau menjawab pertanyaan kalian, selesaikan masalah-masalah yang disajikan berikut ini terkait pembuktian pernyataan dengan membuatkan alur pembuktian.

Untuk mendukung aktivitas selanjutnya, berikut diberikan informasi untuk mengingatkan kembali ingatan kalian tentang beberapa istilah atau definisi.

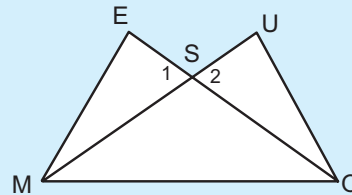
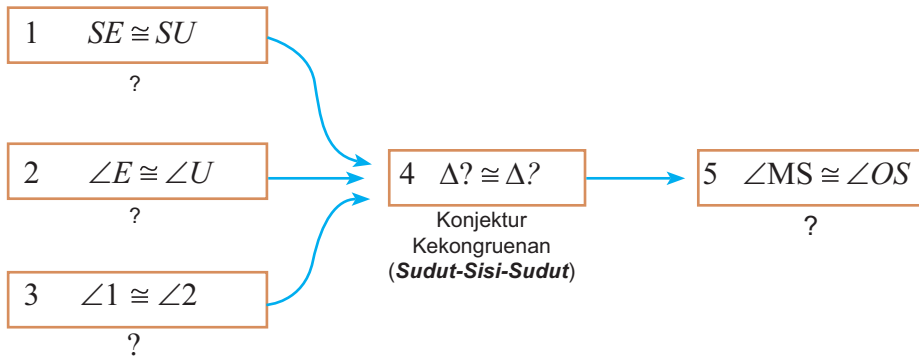
- **Titik tengah ruas garis *(Midpoint)***: titik tengah ruas garis adalah titik yang membagi ruas garis menjadi dua ruas garis yang kongruen (panjangnya sama besar)
- **Garis tinggi sisi segitiga *(Altitude)***: ruas garis tinggi sisi segitiga adalah garis yang melalui titik sudut segitiga dan memotong tegak lurus garis yang melalui dua titik sudut lainnya.
- **Garis bagi sudut segitiga *(bisector angle)***: ruas garis bagi sudut segitiga adalah garis yang membagi sudut segitiga menjadi dua sudut yang kongruen (berukuran sama besar)
- **Garis berat *(Median)***: ruas garis bagi sisi adalah garis yang melalui titik sudut segitiga dan memotong sisi di depannya di titik tengahnya (midpoint)
- **Dua sisi kongruen**, jika kedua sisi tersebut berukuran sama panjang. Misalkan sisi $\overline{EC}$ dan $\overline{AC}$ kongruen ($\overline{EC} \cong \overline{AC}$), berarti ukuran panjang sisi EC dan AC sama ($m\overline{EC} = m\ \overline{AC}$).
- **Dua sudut kongruen**, jika kedua sudut tersebut berukuran sama. Misalkan sudut $\angle A$ dan $\angle B$ kongruen ($m\angle A \cong m\angle B$), berarti ukuran besar sudut $\angle A$ dan $\angle B$ sama ($m\ \angle A = m\angle B$).

- **Sudut-sudut bertolak belakang**: dua sudut yang kaki-kaki sudut pertama adalah sinar-sinar pada arah kebalikannya dari kaki-kaki sudut kedua. *Sudut-sudut bertolak belakang kongruen.*

- **Sudut** $\angle 1$ dan $\angle 2$ adalah *sudut-sudut bertolak belakang.*

Masalah 4.1.3

Lengkapilah masing-masing alasan dan pernyataan yang belum terisi pada pembuktian berikut.

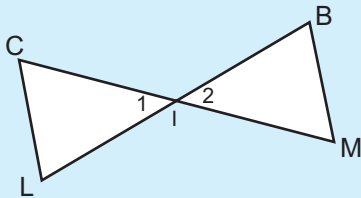
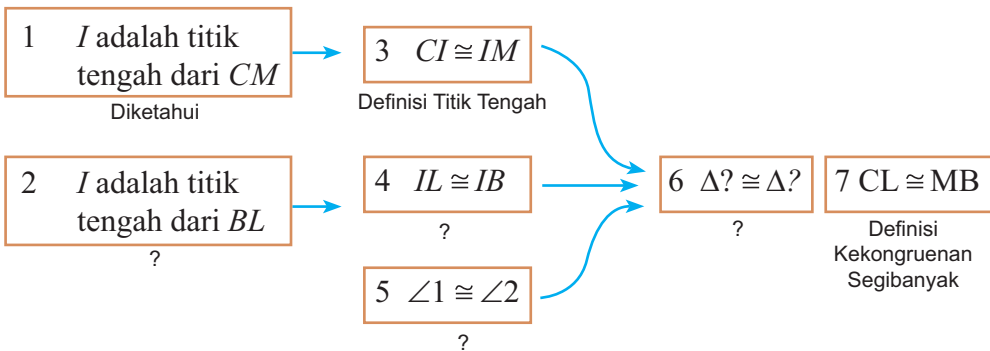
Diketahui: $SE \cong SU$ dan $\angle E \cong U$

Tunjukkan: MS $\cong$ OS

Alur pembuktian:

No.	Pernyataan	Alasan
1.	$SE \cong SU$	....
2.	$\angle E \cong \angle U$	....
3.	$\angle 1 \cong \angle 2$	....
4.	....	Konjektur Kekongruen Sudut-Sisi-Sudut
5.	$MS \cong OS$	....

Masalah 4.1.4

Lengkapilah masing-masing alasan dan pernyataan yang belum terisi pada pembuktian berikut.

Diketahui: I adalah titik tengah dari CM dan I adalah titik tengah dari BL.

Tunjukkan: $CL \cong MB$

Alur pembuktian:

Bukti formal:

No.	Pernyataan	Alasan
1.	I adalah titik tengah dari CM	Diketahui
2.	I adalah titik tengah dari BL	....
3.	$CI \cong$ IM	Definisi Titik Tengah
4.	$IL \cong$ IB	....
5.	$\angle 1 \cong \angle 2$	....
6.	....	....
7.	$CL \cong$ MB	Definisi Kekongruenan Segibanyak

Berdasarkan kegiatan mengumpulkan informasi, buatlah kesimpulan atau jawaban atas pertanyaan yang diajukan pada kegiatan menanya tentang menyusun alur pembuktian deduktif.

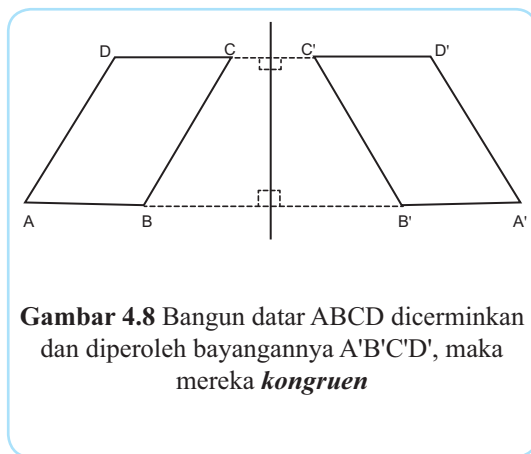
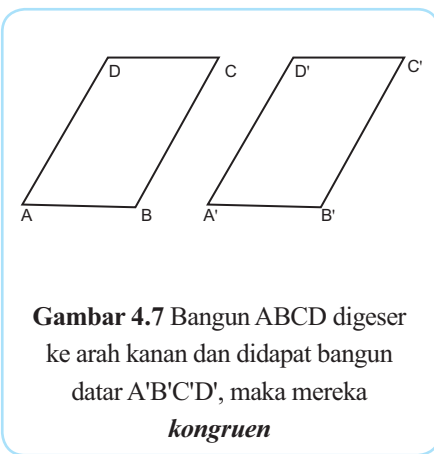
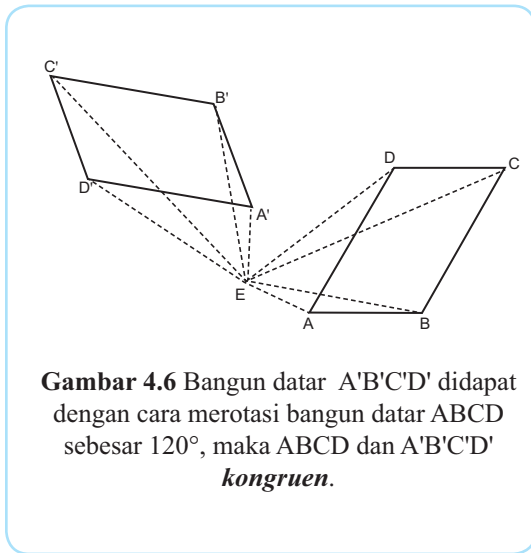
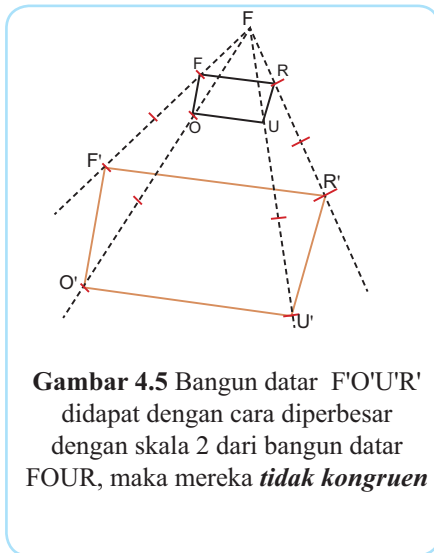
Untuk menambah pengalaman belajar Anda dalam membuktikan suatu pernyataan matematika secara deduktif, kerjakan masalah berikut secara individu atau berkelompok.

Masalah 4.1.5

Misalkan segitiga sama kaki ABC, dengan $AB = AC$, dan titik D adalah titik tengah BC. Selidiki apakah ruas garis AD adalah garis berat sekaligus garis tinggi segitiga sama kaki ABC melalui pengukuran dan buktikan secara deduktif.

Presentasikan/bandingkan jawaban atas penyelesaian dari Masalah 4.1.5. Diskusikan tentang bagaimana tahapan/cara menyusun pembuktian deduktif.

Kegiatan 4.1.5: Menentukan Kekongruenan Bangun Datar dengan Bangun Datar Hasil Transformasi (Rotasi, Pergeseran, Dilatasi/Perbesaran, Pencerminan)

Perhatikan informasi berikut:

Gambar 4.5 Bangun datar F'O'U'R' didapat dengan cara diperbesar dengan skala 2 dari bangun datar FOUR, maka mereka ***tidak kongruen***

Gambar 4.6 Bangun datar A'B'C'D' didapat dengan cara merotasi bangun datar ABCD sebesar 120°, maka ABCD dan A'B'C'D' ***kongruen***.

Gambar 4.7 Bangun ABCD digeser ke arah kanan dan didapat bangun datar A'B'C'D', maka mereka ***kongruen***

Gambar 4.8 Bangun datar ABCD dicerminkan dan diperoleh bayangannya A'B'C'D', maka mereka ***kongruen***

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

Ayo Menanya

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari hasil pengamatan, buatlah kesimpulan awal terkait kekongruenan antara segibanyak dengan segibanyak hasil transformasinya atau tulis semua pertanyaan yang ingin Anda ketahui terkait informasi tersebut.

Ayo Mengumpulkan Informasi dan Menalar

Untuk bisa mengecek kebenaran konjektur yang Anda buat atau menjawab pertanyaan Anda, lakukan aktivitas penyelidikan berikut.

Penyelidikan 4.1.5.1: Menentukan Kekongruenan Dua Bangun Datar Hasil Rotasi.

Gambar sebarang segiempat ABCD. Gambar satu titik O di luar segiempat ABCD sebagai pusat perputaran. Tentukan bayangan hasil rotasinya jika diputar sebesar 60° berlawanan dengan arah jarum jam, lakukan penyelidikan terkait hubungan kekongruenannya dengan mengikuti langkah-langkah berikut.

Langkah 1: gambarlah segiempat ABCD,

Langkah 2: rotasi segiempat tersebut dengan sudut putar 60° dan pusat rotasi di luar segiempat ABCD, dengan mengikuti tahapan-tahapan berikut.

1) Tentukan sebuat titik O di luar segiempat.
2) Buat garis putus-putus yang menghubungkan titik-titik sudut ke titik pusat putar O, sehingga terbentuk garis AO, BO, CO, dan DO
3) Putar garis AO, BO, CO, dan DO sebesar 60° berlawanan dengan arah jarum jam
4) Tandailah titik ujung garis hasil merotasi garis AO, BO, CO, dan DO dengan huruf A', B', C' dan D' secara berurutan.
5) Hubungkan titik-titik A', B', C', dan D' sehingga membentuk segiempat A'B'C'D'.

Langkah 3 : ukurlah semua sisi dan sudut pada segiempat A'B'C'D'.

Langkah 4 : bandingkan ukuran semua sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian dari segiempat ABCD dan A'B'C'D'.

Tuliskan kesimpulan tentang hubungan kekongruenan antara segibanyak dan segibanyak hasil transformasi rotasinya yang didapat dari kegiatan Penyelidikan 4.1.3.1.

Penyelidikan 4.1.5.2: Menentukan Kekongruenan Dua Bangun Datar Hasil Pencerminan/Refleksi.

Gambar sebarang segiempat ABCD, selanjutnya tentukan bayangan hasil pencerminan, lakukan penyelidikan terkait hubungan kesebangunannya dengan mengikuti langkah-langkah berikut:

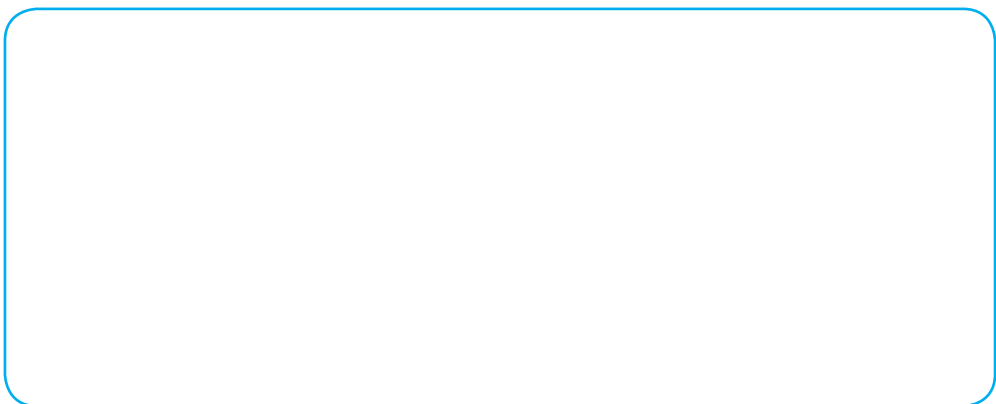
Langkah 1: gambarlah sebarang segiempat ABCD,

Langkah 2: gambarlah garis *l* di luar segiempat sebagai cermin,

Langkah 3: gambarlah bayangan segiempat hasil pencerminan, dengan mengikuti tahapan-tahapan berikut.

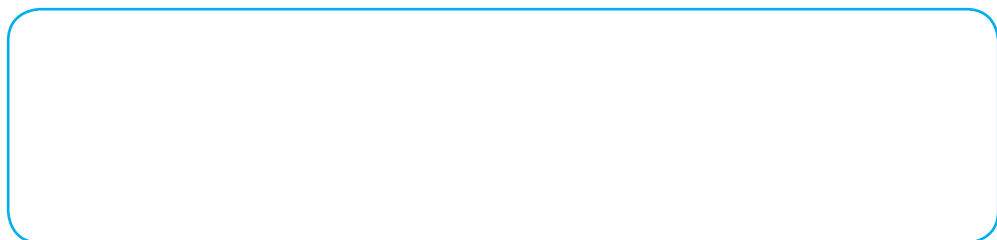
1) Buat garis melalui titik-titik sudut A, B, C dan D yang memotong tegak lurus garis *l* di O, P, Q dan R secara berurutan, sehingga terbentuk garis AO, BP, CQ dan DR.
2) Perpanjang garis AO ke titik A' sehingga panjang AO sama dengan panjang OA'.
3) Lakukan proses yang sama seperti langkah (b) untuk mendapatkan titik-titik B'', C' dan D'.
4) Hubungkan titik-titik A', B', C', dan D' sehingga membentuk segiempat A'B'C'D'.

Langkah 3: ukurlah semua sisi dan sudut pada segiempat A'B'C'D'.

Langkah 4: bandingkan ukuran sisi-sisi yang bersesuaian dan ukuran sudut-sudut yang bersesuaian dari segiempat ABCD dan A'B'C'D'.

Tuliskan kesimpulan tentang hubungan kekongruenan antara segibanyak dan segibanyak hasil pencerminannya yang didapat dari kegiatan Penyelidikan 4.1.5.2.

Penyelidikan 4.1.5.3: menentukan kekongruenan dua bangun datar hasil pergeseran.

Gambar sebarang segiempat ABCD, selanjutnya tentukan bayangan hasil pergeseran dengan aturan pergeseran yang ditetapkan, lakukan penyelidikan terkait hubungan kesebangunannya dengan mengikuti langkah-langkah berikut.

Langkah 1: gambarlah sebarang segiempat ABCD pada bidang kartesius,

Langkah 2: gambarlah bayangan segiempat hasil pergeseran dengan aturan pergeserannya: $(x, y) \longrightarrow (x + 2, y - 1)$, dengan mengikuti tahapan-tahapan berikut.

Tentukan koordinat bayangan A', B', C' dan D' dari titik-titik sudutnya mengikuti aturan pergeserannya.

Hubungkan titik-titik A', B', C', dan D' sehingga membentuk segiempat A'B'C'D'.

Langkah 3: ukurlah semua sisi dan sudut pada segiempat A'B'C'D'.

Langkah 4: bandingkan ukuran sisi-sisi yang bersesuaian dan ukuran sudut-sudut yang bersesuaian dari segiempat ABCD dan A'B'C'D'.

Tuliskan kesimpulan tentang hubungan kekongruenan antara segibanyak dan segibanyak hasil pergeseran yang didapat dari kegiatan Penyelidikan 4.1.5.3.

Penyelidikan 4.1.5.4: menentukan kekongruenan dua bangun datar hasil dilatasi. Gambar sebarang segiempat ABCD, selanjutnya tentukan bayangan hasil dilatasi dengan aturan pergeseran yang ditetapkan, lakukan penyelidikan terkait hubungan kesebangunannya dengan mengikuti langkah-langkah berikut.

Langkah 1: gambarlah sebarang segiempat ABCD pada bidang kartesius,

Langkah 2: gambarlah bayangan segiempat hasil dilatasi dengan skala $\frac{3}{2}$ dengan aturan pergeserannya: $(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{2}x, \frac{3}{2}y\right)$, dengan mengikuti tahapan-tahapan berikut.

1) Tentukan koordinat bayangan A', B', C' dan D' dari titik-titik sudutnya mengikuti aturan pergeserannya.
2) Hubungkan titik-titik A', B', C' dan D' sehingga membentuk segiempat A'B'C'D'.

Langkah 3: ukurlah semua sisi dan sudut pada segiempat A'B'C'D'.

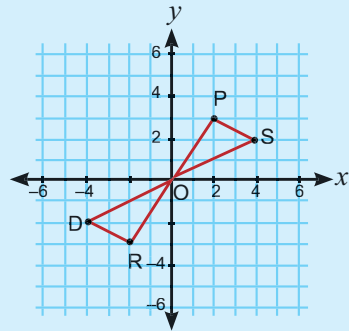
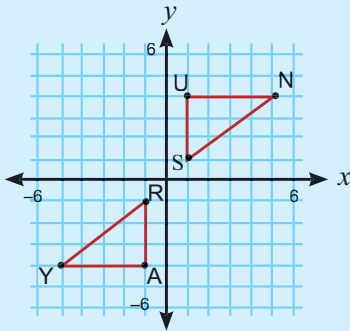
Langkah 4: bandingkan ukuran panjang sisi-sisi yang bersesuaian dan ukuran sudut-sudut yang bersesuaian dari segiempat ABCD dan A'B'C'D'.

Tuliskan kesimpulan tentang hubungan kekongruenan antara segibanyak dan segibanyak hasil dilatasi yang didapat dari kegiatan Penyelidikan 4.1.5.4.

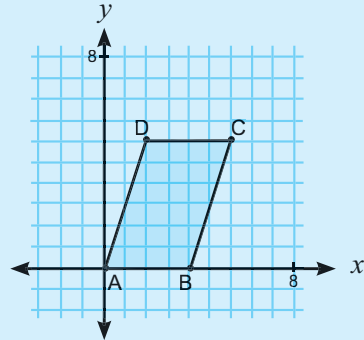
Masalah 4.1.6

Tentukan apakah ruas garis-ruas garis atau segitiga pada bidang kartesius kongruen dan jelaskan alasannya.

a. $\Delta SUN \cong \Delta \underline{?}$

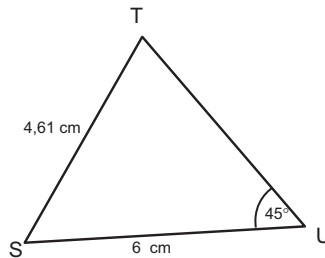
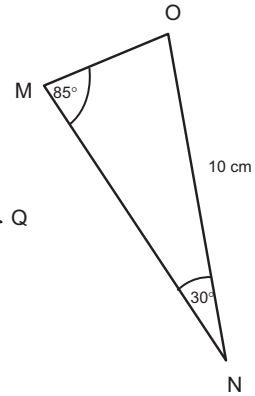
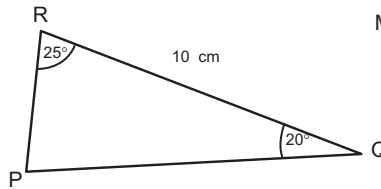
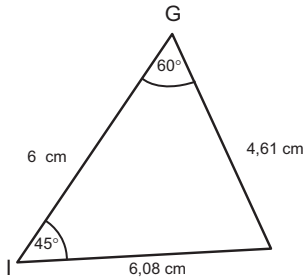
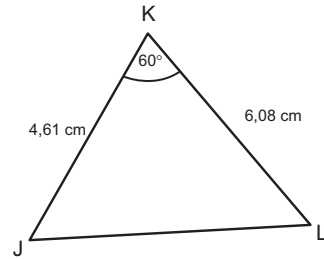
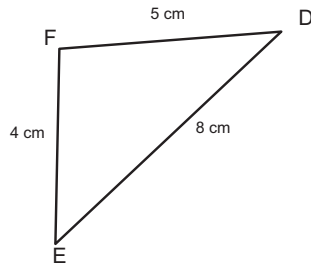
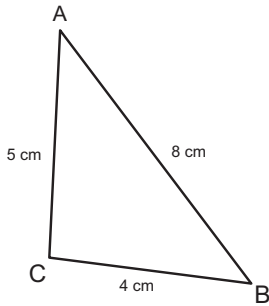
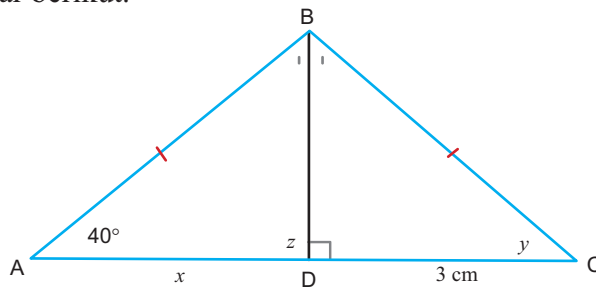
b. $\Delta DRO \cong \Delta \underline{?}$

Masalah 4.1.7

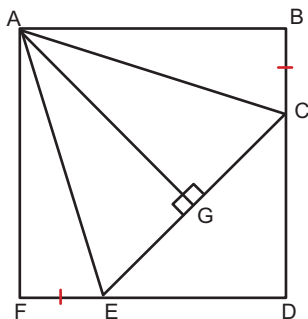
Gunakan aturan pasangan urutan, $(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$, untuk merelokasi koordinat titik-titik sudut jajargenjang ABCD.

Sebut jajargenjang baru A'B'C'D'. Apakah A'B'C'D' kongruen dengan ABCD?
Jika tidak kongruen, berapa rasio keliling ABCD terhadap keliling A'B'C'D'? berapa rasio luasnya?

Ayo Mengomunikasikan

Presentasikan/bandingkan kesimpulan yang Anda buat sendiri atau secara berkelompok dari hasil aktivitas Kegiatan 4.1.5 di depan kelas untuk diperoleh kesimpulan yang lengkap dan benar tentang hubungan kekongruenan antara segibanyak dan segibanyak hasil transformasinya. Tuliskan hasil presentasi dan diskusi kelasnya.

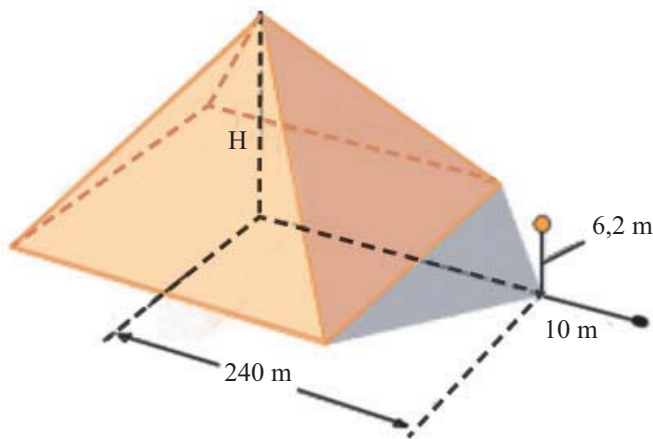
Contoh Soal 4.1

1. Identifikasi segitiga-segitiga berikut yang kongruen menggunakan aturan sinus dan kosinus.

2. Diketahui segitiga ΔABD kongruen dengan ΔCBD seperti yang terlihat pada gambar berikut.

Tentukan nilai x, y, dan z.

3. Diketahui segitiga ABC dengan $A(–2, 6)$, $B(4, –2)$, dan $C(10,6 ; 9,2)$.
    a. Tentukan bayangan segitiga ABC jika dirotasi dengan pusat O(0,0) sebesar 60° berlawanan arah jarum jam
    b. Gambarkan segitiga ABC dan bayangannya dalam 1 bidang koordinat Cartesius.
    c. Jelaskan apakah segitiga ABC dan bayangannya merupakan dua segitiga yang sebangun
    d. Tentukan perbandingan luas segitiga ABC dengan luas segitiga bayangannya.
4. Diketahui segitiga ABC dengan $A(3, 0)$, $B(6,2)$, dan $C(6, –4)$.
    a. Tentukan bayangan segitiga ABC oleh dilatasi dengan pusat $O(0,0)$ dan faktor skala 3.
    b. Gambarkan segitiga ABC dan bayangannya dalam 1 bidang koordinat *Cartesius*.
    c. Jelaskan apakah segitiga ABC dan bayangannya merupakan dua segitiga yang sebangun
    d. Tentukan perbandingan luas segitiga ABC dengan luas segitiga bayangannya.
5. $ABDF$ adalah persegi dan $BC = EF$. Tentukan pasangan segitiga-segitiga yang kongruen pada gambar berikut.

Subbab 4.2 Kesebangunan

Sebuah Kisah Matematikawan Yunani, Thales.

Saat berlibur di Mesir, matematikawan Yunani, Thales menghitung ketinggian Piramida Besar. Menurut cerita legenda, Thales menempatkan sebuah tiang di ujung bayangan piramida dan menggunakan segitiga yang sebangun untuk menghitung ketinggian. Pengukuran ini melibatkan beberapa nilai pendekatan karena ia tidak dapat mengukur jarak dari titik yang tepat di bawah puncak piramida ke ujung bayangan.

Gambar berikut, menjelaskan metodenya.

Gambar 4. Sketsa yang dibuat Thales

Ketika membaca cerita tersebut, mungkin ada beberapa pertanyaan yang muncul dalam pikiran Anda, diantaranya:

1. Bagaimana cara Thales menentukan tinggi piramid tersebut?
2. Mengapa cara tersebut bisa digunakan?

Apersepsi: Review pengetahuan sebelumnya

Gunakan kemampuan aljabar dan pengetahuan Anda sebelumnya terkait rasio, proporsi dan korespondensi dua segibanyak.

1. Coba tuliskan 3 contoh rasio!

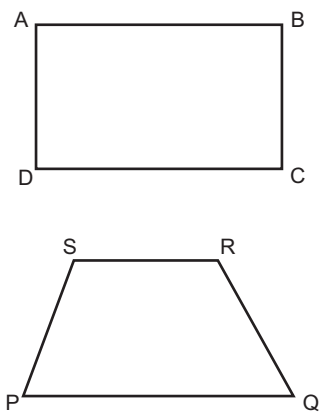
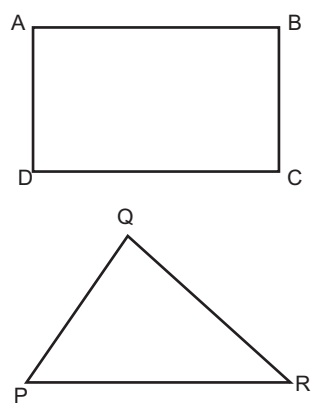
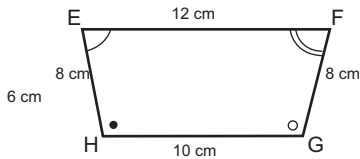
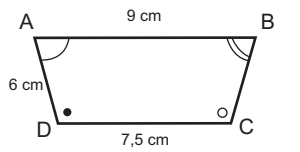
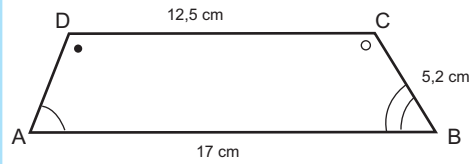
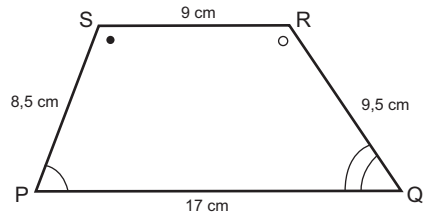
2. Tuliskan minimal 2 rasio yang senilai dari tiga contoh rasio yang Anda tulis pada latihan 1.

Selain konsep rasio, Anda juga sudah mendapatkan pengetahuan tentang konsep proporsi/kesamaan dua rasio.

3. Coba tuliskan 3 contoh proporsi!

4. Apa syarat dua segibanyak dapat dibuatkan korespondensi? Bagaimana cara menentukan pasangan sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian dari dua segibanyak yang dapat dibuatkan korespondensi?

Kegiatan Inti

Untuk dapat memahami konsep kesebangunan bangun datar, coba amati beberapa informasi yang disajikan di bawah ini.

Segiempat ABCD dan segiempat PQRS
tidak sebangun

Segiempat ABCD dan segitiga PQR
tidak sebangun

Segiempat ABCD dan segiempat EFGH ***sebangun***

Segiempat ABCD dan segiempat PQRS ***tidak sebangun***

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

Ayo Menanya

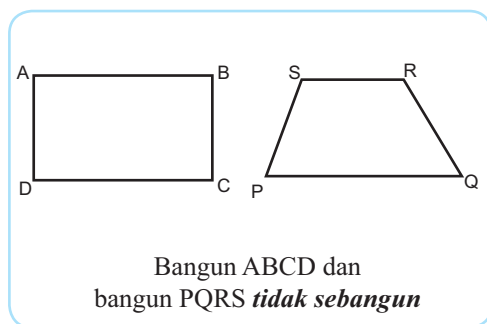
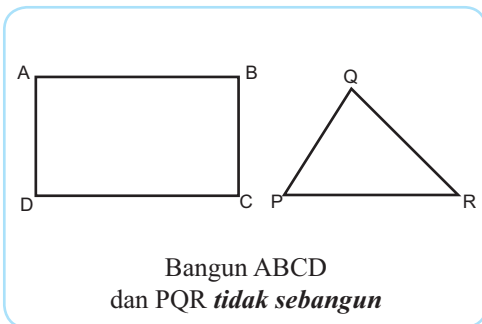
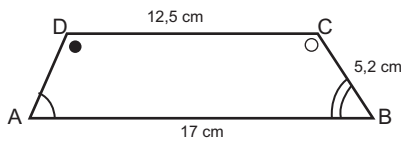
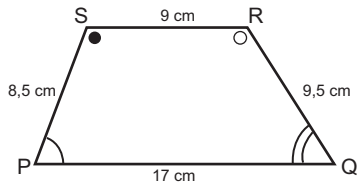
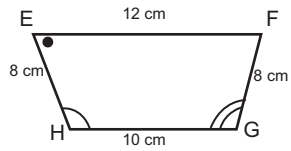
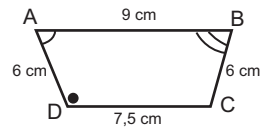
Perhatikan kelompok pasangan-pasangan bangun datar yang diberikan dikaitkan dengan informasi sebangun atau tidak pasangan bangun datar tersebut serta lakukan penyelidikan terkait ukuran sisi, perbandingan/rasio dari dua sisi dan ukuran sudutnya.

Buatlah kesimpulan sementara (konjektur) dari hasil pengamatan Anda atau tuliskan pertanyaan-pertanyaan terkait kesebangunan, rasio panjang sisi dari pasangan sisi yang bersesuaian, ukuran sudut-sudut yang bersesuaian dari masing-masing pasangan bangun datar.

Kesimpulan sementara yang Anda ajukan pada sesi sebelumnya perlu di uji kebenarannya. Begitu juga pertanyaan-pertanyaan yang Anda ajukan perlu di cari jawabannya. Untuk memenuhi kebutuhan tersebut, perhatikan informasi-informasi yang akan diberikan pada bagian ini. Anda juga akan diminta melengkapi informasi tersebut berdasarkan pengetahuan yang Anda miliki atau dari informasi yang diberikan pada bagian ini.

Kegiatan 4.2.1: Mengidentifikasi Kesebangunan Dua Bangun Datar
Perhatikan sepasang bangun datar yang dilengkapi informasi ukuran panjang sisi-sisi dan sudut-sudutnya.

Bangun ABCD
dan PQR ***tidak sebangun***

Bangun ABCD dan
bangun PQRS ***tidak sebangun***

Bangun ABCD dan bangun PQRS ***tidak sebangun***

Bangun ABCD dan bangun EFGH ***sebangun***

Lakukan penyelidikan pada masing-masing pasangan segibanyak di atas dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut.

Untuk masing-masing gambar pasangan segibanyak di atas, jawab pertanyaan berikut.

1. Apakah ada korespondensi satu-satu antara titik-titik sudut pada dua bangun datar tersebut?

2. Jika ada korespondensi, tentukan sisi-sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian?

3. Tentukan semua rasio dari pasangan sisi yang bersesuaian? Apakah semua nilai rasionya sama?

4. Apakah semua ukuran sudut-sudut yang bersesuaian sama?

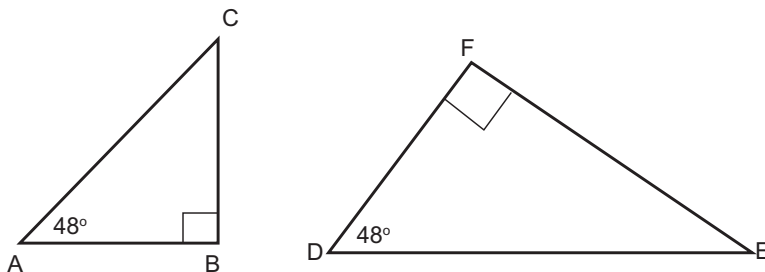
Hubungkan/kaitkan informasi tentang kesebangunan sepasang segibanyak dengan jawaban yang diperoleh dari hasil penyelidikan tersebut.

Berdasarkan hasil analisis atau mengkait-kaitkan informasi yang diperoleh, buatlah kesimpulan terkait ***syarat dua segibanyak sebangun:***

Presentasikan/bandingkan kesimpulan yang Anda buat sendiri atau secara berkelompok dari hasil aktivitas kegiatan 1 dan 2 di depan kelas untuk diperoleh kesimpulan yang lengkap dan benar tentang ***Kesebangunan Bangun Datar.*** Tuliskan hasil presentasi dan diskusi kelasnya.

Catatan: Kesimpulan ini terkait ***Definisi kesebangunan segibanyak***.

Kegiatan 4.2.2: Mengidentifikasi Segitiga-Segitiga yang Sebangun

Perhatikan gambar berikut.

Dua segitiga siku-siku ABC dan DEF siku-siku di titik B dan F, sudut A dan sudut B kongruen, maka segitiga ABC dan segitiga DEF sebangun.

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

Ayo Menanya

Dari gambar di atas, buatlah pertanyaan terkait hasil pengamatan Anda dan berikan kesimpulan sementara/konjektur terkait pertanyaan yang diajukan temanmu/kelompok lain!

Ayo Mengumpulkan Informasi dan Menalar

Untuk mengklarifikasi dugaan sementara/konjektur Anda, lakukan penyelidikan berikut.

Penyelidikan 4.2.2.1: Menentukan kesebangunan segitiga (***Sudut-Sudut***) dengan pengukuran.

Gambarlah dua segitiga yang dua sudut dari segitiga pertama sama besar dengan dua sudut dari segitiga yang kedua, ikuti langkah-langkah berikut.

1. Gambar sebarang segitiga ABC.
2. Gambar segitiga kedua, DEF, dengan ukuran sudut D sama dengan ukuran sudut A(ditulis, $\angle D \cong \angle A$) dan ukuran sudut E sama dengan ukuran sudut B (ditulis, $\angle E \cong \angle B$). Bagaimana dengan sepasang sudut yang lain, $\angle C$ dan $\angle F$? Mengapa?

3. Secara teliti, ukurlah panjang sisi-sisi dari kedua segitiga tersebut. Bandingkan nilai rasio dari panjang sisi-sisi yang bersesuaian.
4. Bandingkan hasilnya dengan pekerjaan teman di sebelahmu.

Buatlah kesimpulan dari hasil membandingkan tersebut, dengan melengkapi pernyataan berikut.

Catatan: berdasarkan tahapan ke-2 dari Penyelidikan 4.2.2.1, apakah perlu mengetahui ukuran sudut ke-3 (***Sudut-Sudut-Sudut***) untuk mengecek kesebangunannya? Mengapa?

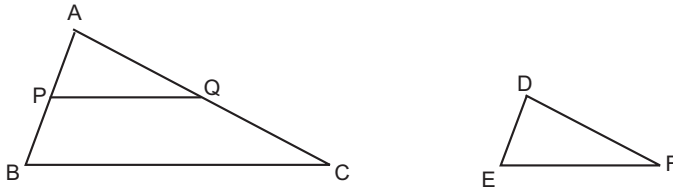
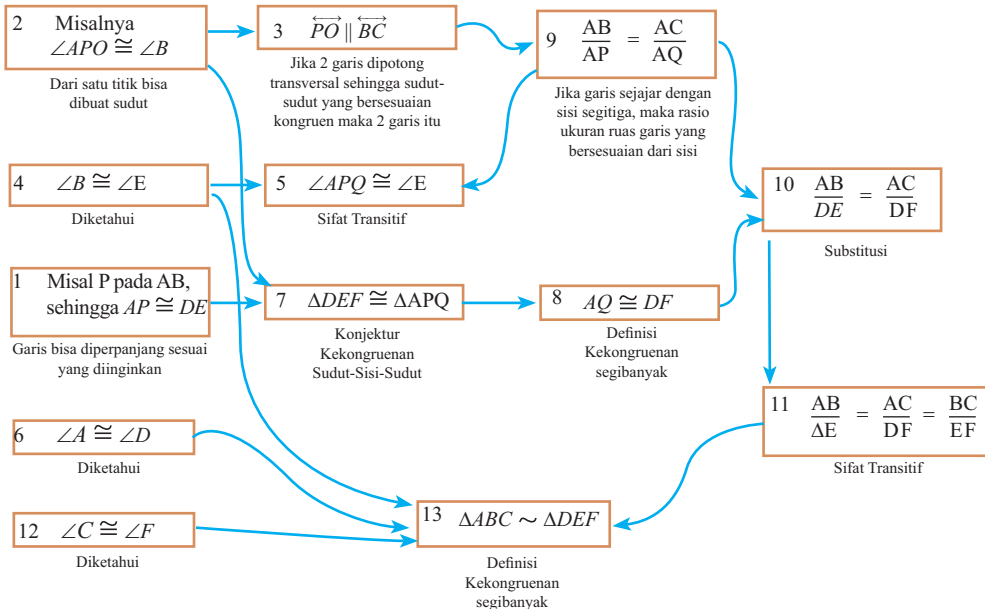
Untuk menambah wawasan Anda, berikut akan disajikan contoh pembuktian deduktif dari kesimpulan yang Anda dapatkan tentang kesebangunan dua segitiga jika diketahui ukuran sudut-sudut yang bersesuaian (***Konjektur Kesebangunan Sudut-Sudut-Sudut***).

Contoh Soal 4.2.1

Bukti Konjektur Kesebangunan segitiga Sudut-Sudut-Sudut

Misalkan diberikan dua segitiga *ABD* dan *DEF*, di mana $\angle A \cong \angle D$, $B \cong \angle E$ dan $\angle C \cong \angle F$, maka $\Delta ABD \sim \Delta DEF$ (sebangun).

Bukti:

Pernyataan tersebut bila digambarkan seperti gambar berikut:

Untuk menuliskan bukti dari pernyataan tersebut, berikut akan diberikan alur pernyataan-pernyataan serta alasan yang mendukung munculnya pernyataan tersebut sehingga diperoleh pernyataan kesimpulan. Untuk membantu kalian memahami alur pembeuktian berikut, baca kembali Kegiatan 4.1.4 tentang alur/*flowchat* berpikir untuk pembuktian deduktif.

Pernyataan yang akan dibuktikan terdiri dari informasi yang diketahui dan yang akan dibuktikan, sehingga dapat ditulis:

Diketahui: $\angle A \cong \angle D$, $B \cong \angle E$, dan $\angle C \cong \angle F$

Akan dibuktikan: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

No.	Pernyataan	Alasan
1.	Misal P pada AB, sehingga $AP \cong DE$	Garis bisa diperpanjang sesuai yang diinginkan
2.	Misal $\angle APQ \cong \angle B$	Dari satu titik bisa dibuat sudut
3.	$\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$	Jika 2 garis dipotong transversal sehingga sudut-sudut yang bersesuaian kongruen, maka 2 garis itu sejajar
4.	$\angle B \cong \angle E$	Diketahui
5.	$\angle APQ \cong \angle E$	Sifat Transitif
6.	$\angle A \cong \angle D$	Diketahui
7.	$\Delta DEF \cong \Delta APQ$	Kekongruenan segitiga (Sudut-Sisi-Sudut)
8.	$\overline{AQ} \parallel \overline{DF}$	Definisi Kekongruenan
9.	$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$	Jika garis sejajar dengan sisi segitiga, maka rasio ukuran ruas garis yang bersesuaian dari sisi yang lain akan sama
10.	$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$	Subsitusi
11.	$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$	Transitif
12.	$\angle C \cong \angle F$	Diketahui
13.	$\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Definisi Kesebangunan Segibanyak

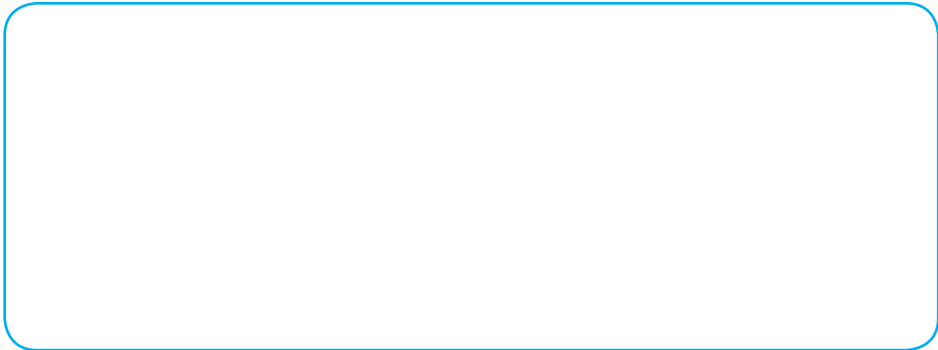
Penyelidikan 4.2.2.1 memberikan konfirmasi kepada Anda bahwa untuk menyimpulkan apakah dua segitiga sebangun atau tidak bisa menggunakan pengecekan kesebangunan dengan ***Konjektur Sudut-Sudut-Sudut***. Bagaimana bila informasi yang dimiliki terkait ukuran dua sisi dan satu sudut (S***isi-Sudut-Sisi***), apakah cukup untuk mengecek kesebangunannya?

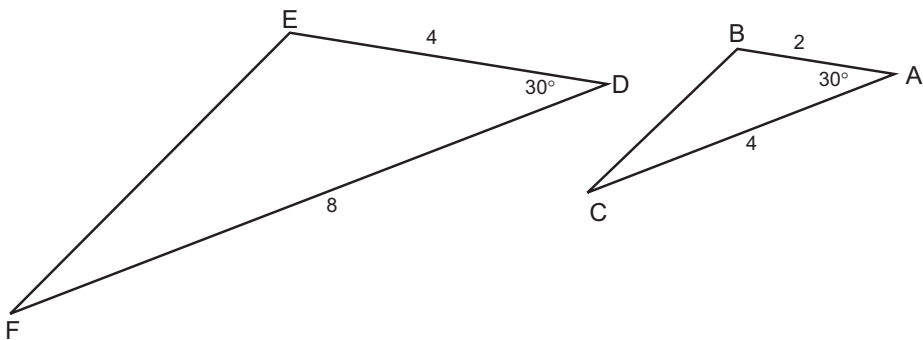
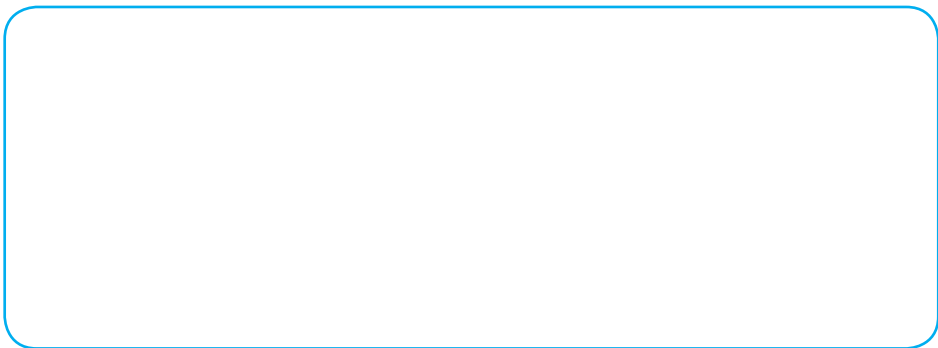
Untuk mengklarifikasi konjektur atau jawaban Anda terkait pertanyaan tersebut, lakukan penyelidikan berikut.

Penyelidikan 4.2.2.2: Menentukan Kesebangunan segitiga (***Sisi-Sudut-Sisi***) dengan pengukuran.

Gambarkan dua segitiga yang berbeda, di mana 2 sisi segitiga pertama proporsional dengan 2 sisi segitiga kedua dan sudut yang dibentuk oleh kedua sisi tersebut pada segitiga pertama sama besar dengan sudut yang jg dibentuk oleh dua sisi yang proporsional pada segitiga kedua, ikuti langkah-langkah berikut.

1. Gambar segitiga sebarang ABC
2. Gambar segitiga kedua, DEF, yang panjang dua sisi segitiga pertama proporsional dengan dua sisi segitiga kedua dan sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut sama besar.

3. Bandingkan ukuran sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian. Diskusikan hasil yang Anda dapat dengan hasil teman sebelah Anda.

Penyelidikan 4.2.2.3: Menentukan Kesebangunan segitiga (***Sisi-Sudut-Sisi***) dengan menerapkan ***aturan sinus.***

Misalkan diketahui segitiga ABC dengan ukuran panjang sisi $AB = 2$, $AC = 4$, dan $\angle A = 30°$ dan segitiga ΔDEF dengan panjang sisi $DE = 4$, $DF = 8$, dan $\angle D = 30°$, lakukan pengecekan dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dan ukuran sudut yang bersesuaian?

2. Tentukan ukuran dua sudut-sudut yang lain dan satu sisi yang belum diketahui pada segitiga ΔABC dan ΔDEF dengan menggunakan **aturan kosinus dan aturan sinus**.

3. Bandingkan sudut-sudut yang bersesuaian dan perbandingan sepasang sisi yang lainnya dari kedua segitiga tersebut. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.

Tuliskan kesimpulan yang didapat.

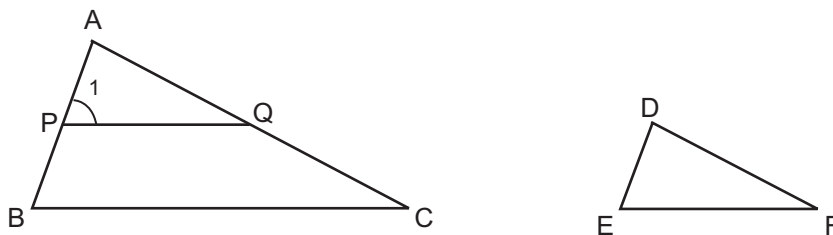
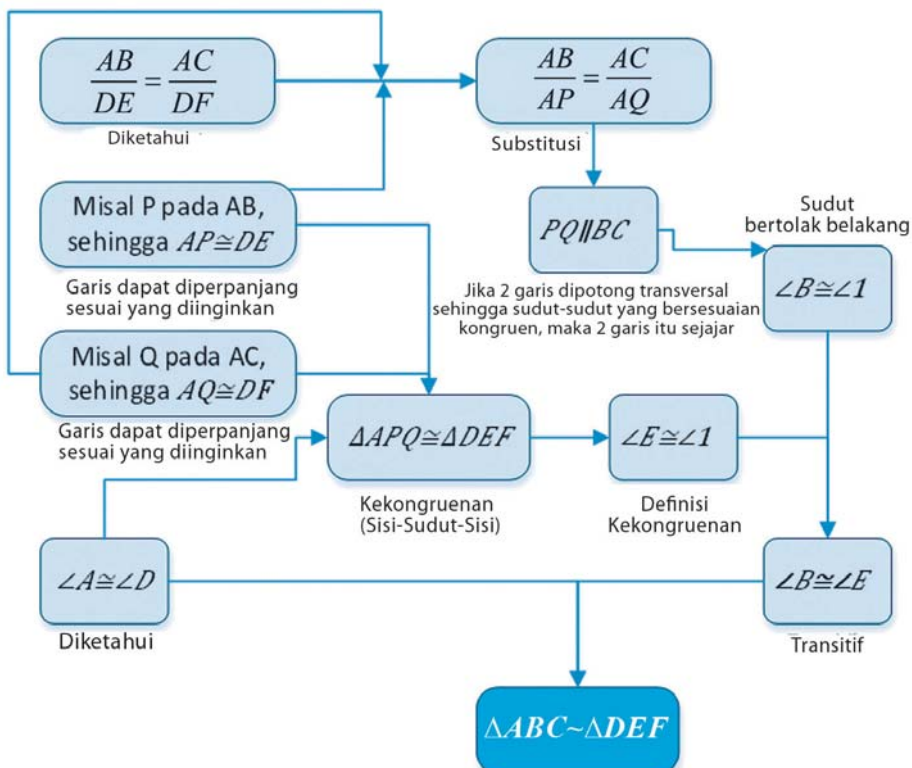
Untuk memperkaya wawasan dan pengetahuan Anda, berikut akan disajikan sebuah contoh pembuktian secara deduktif untuk membuktikan **kesimpulan/ konjektur** tentang kesebangunan dua segitiga jika diketahui sepasang sudut yang bersesuaian dan rasio dari ukuran dua sisi yang bersesuaian (***Konjektur Kesebangunan Sisi-Sudut-Sisi***).

Contoh Soal 4.2.2

Bukti Konjektur Kesebangunan segitiga Sisi-Sudut-Sisi

Diberikan dua segitiga ABC dan DEF, $\angle A \cong \angle D$ dan $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF'}$, maka $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

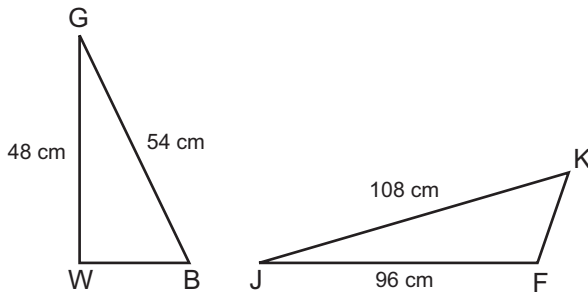
Bukti:

Pernyataan tersebut bila digambarkan seperti gambar berikut:

Perhatikan alur pembuktian berikut.

Diketahui: $\angle A \cong \angle D$ dan $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

Akan dibuktikan: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Bukti Formal: (lengkapi bagian alasan yang mendukung pernyataan-pernyataanya).

No.	Pernyataan	Alasan
1.	Misal P adalah titik pada $\overleftrightarrow{AB}$, sehingga $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ (sisi)	
2.	Misal Q adalah titik pada $\overleftrightarrow{AC}$, sehingga $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$ (sisi)	
3.	$\angle A \cong \angle D$ (sudut)	
4.	$\Delta APQ \cong \Delta DEF$	
5.	$\angle E \cong \angle 1$	
6.	$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$	
7.	$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$	
8.	$\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$	
9.	$\angle B \cong \angle 1$	
10.	$\angle B \cong \angle E$	
11.	$\Delta\angle \boldsymbol{ABC} \sim \Delta\angle \boldsymbol{DEF}$	

Sekarang perhatikan informasi berikut:

$$\frac{54}{108} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{48}{96} = \frac{1}{2}$$

Rasio dari dua sisi yang bersesuaian $\frac{GB}{JK} = \frac{GW}{JF}$, tetapi segitiga *GWB* ***tidak sebangun*** dengan segitiga *JFK*.

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

Ayo Menanya

Ajukan dugaan awal/konjektur atau pertanyaan terkait informasi yang Anda amati kaitannya dengan syarat kesebangunan dua segitiga.

Untuk mengklarifikasi konjektur atau jawaban Anda, lakukan investigasi berikut.

Penyelidikan 4.2.2.4: Menentukan Kesebangunan segitiga (***Sisi-Sisi-Sisi***) melalui pengukuran.
Gambarlah dua segitiga yang ketiga sisi segitiga pertama proporsional dengan tiga sisi segitiga kedua (rasio dari ketiga sisi yang bersesuaian sama besar), ikuti langkah-langkah berikut.

1. Gambar sebarang setiga ABC
2. Gambar segitiga kedua, DEF, yang panjang sisi-sisinya kelipatan dari panjang sisi segitiga pertama.
3. Bandingkan sudut-sudut yang bersesuaian dari kedua segitiga tersebut. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.

Penyelidikan 4.2.2.5: Menentukan Kesebangunan segitiga (***Sisi-Sisi-Sisi***) dengan menerapkan ***aturan kosinus.***
Misalkan diketahui segitiga ABC dengan ukuran panjang sisi $AB = 2$, $BC = 3$, dan $CA = 4$ dan segitiga DEF dengan panjang sisi $\overline{DE}$, $EF = 6$, dan $FD = 8$, lakukan pengecekan dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Tentukan rasio/perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian.

2. Tentukan ukuran semua sudut-sudut pada segitiga *ABC* dan *DEF* dengan menggunakan aturan kosinus.

3. Bandingkan sudut-sudut yang bersesuaian dari kedua segitiga tersebut. Bandingkan hasil yang kamu dapatkan dengan hasil yang diperoleh teman sebelahmu.

Tuliskan kesimpulan terkait konjektur kesebangunan dua segibanyak jika diketahui ukuran semua sisi-sisinya dari temuan pada aktivitas Penyelidikan 4.2.2.4 dan 1.2.2.5.

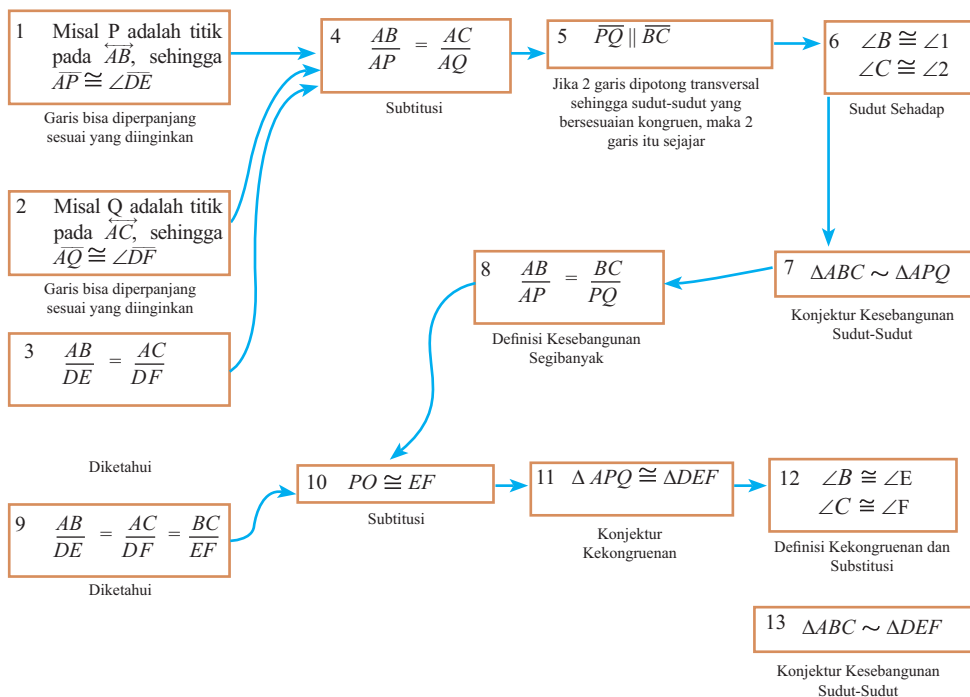
Untuk memperkaya wawasan dan pengetahuan Anda, berikut akan disajikan sebuah contoh pembuktian secara deduktif untuk membuktikan kesimpulan/konjektur tentang kesebangunan dua segitiga jika diketahui rasio dari ukuran semua sisi yang bersesuaian (***Konjektur Kesebangunan Sisi-Sisi-Sisi***).

 Contoh Soal 4.2.2

Bukti Konjektur Kesebangunan segitiga Sisi-Sisi-Sisi

Diberikan dua segitiga ABC dan DEF, di mana $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, maka $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Pembuktian:

Untuk mempermudah proses berpikir dalam penulisan pembuktian secara deduktif, perhatikan alur berpikir berikut ini:

Berdasarkan alur pembuktian di atas, lengkapi pembuktian formal berikut ini:

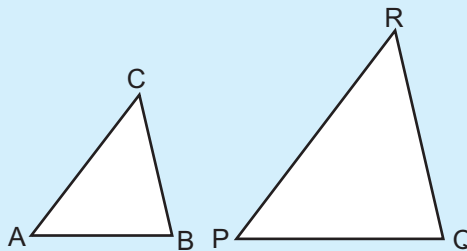
Diketahui: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF'} = \frac{BC}{EF'}$

Akan dibuktikan: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

No.	Pernyataan	Alasan
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		

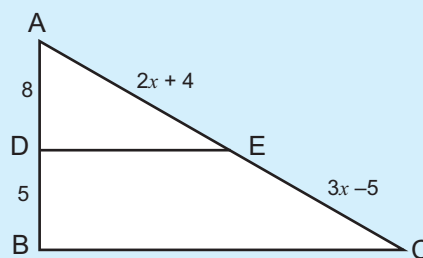
Gunakan semua pengalaman belajar atau pengetahuan yang Anda dapatkan selama melakukan aktivitas pada Kegiatan 4.2.2 untuk menyelesaikan masalah-masalah yang diberikan berikut ini.

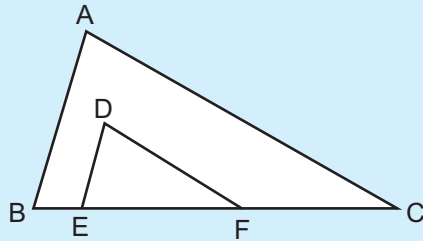
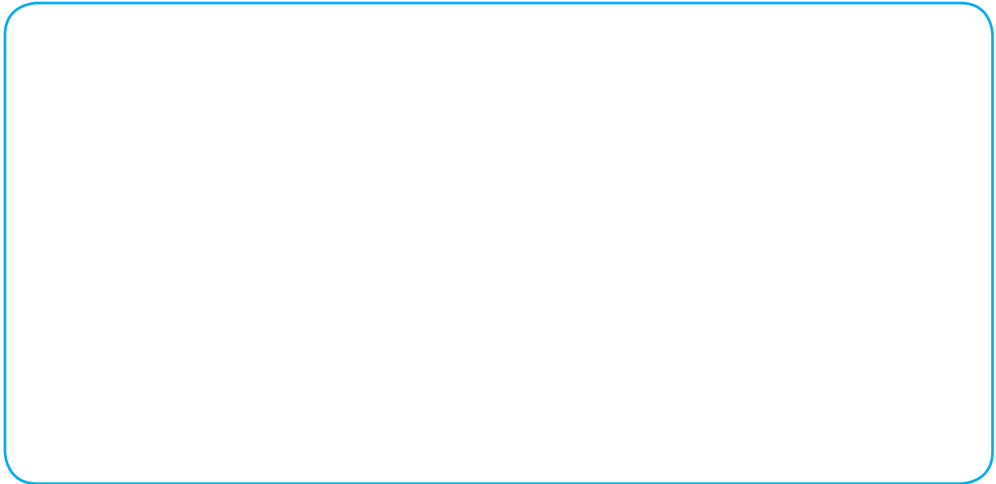
Masalah 4.2.1

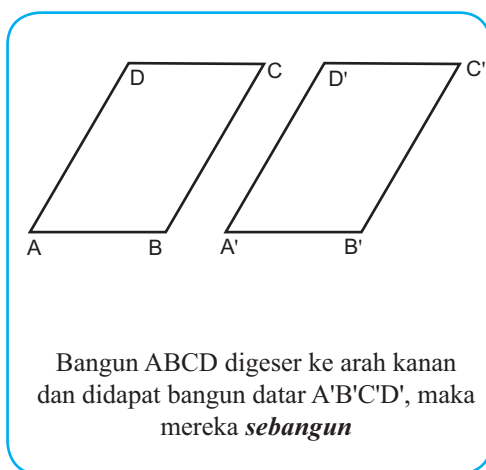
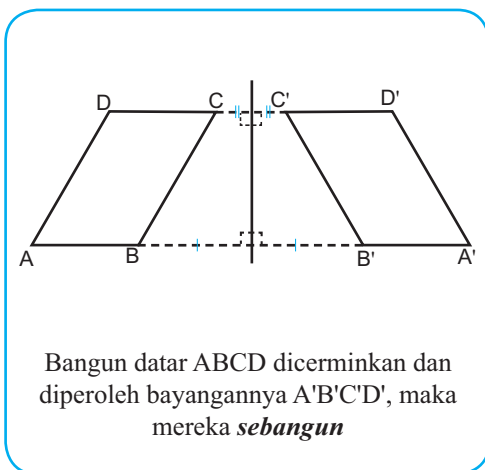
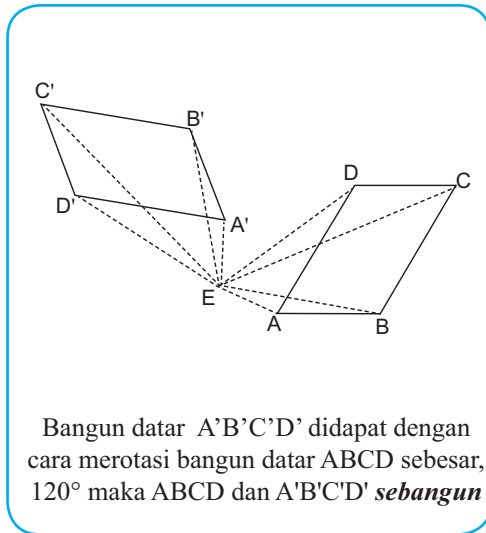
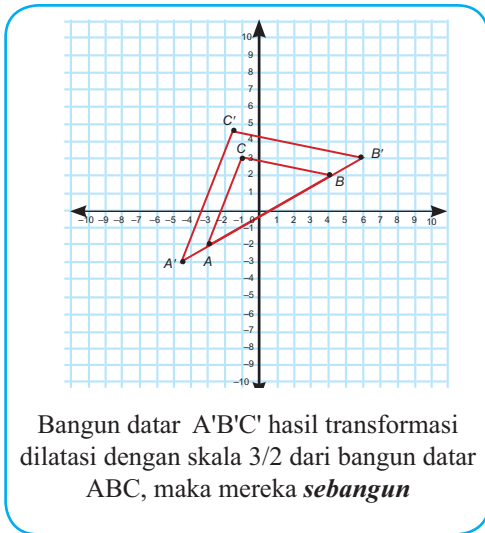
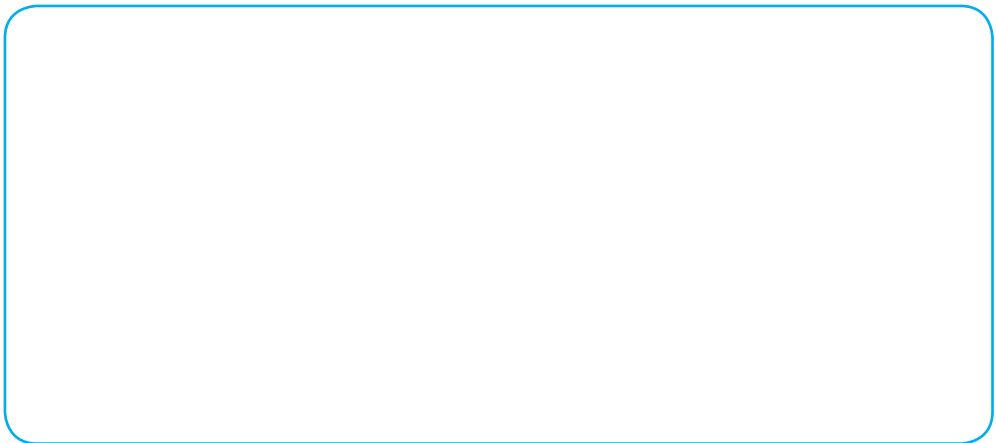
Misalkan segitiga ΔABC dan ΔPQR sebangun, $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm dan AC = 15 cm. Jika PQ = 18 cm, seperti pada gambar berikut.

Tentukan:

1. Panjang sisi-sisi yang lainnya pada segitiga ΔPQR.
2. Ukuran semua sudut pada segitiga ΔABC dan ΔPQR.

Masalah 4.2.2

Pada segitiga ΔABC di samping dibuat ruas $\overline{DE}$ sejajar $\overline{BC}$ dengan D pada $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{DB} = 5$ cm, $\overline{AE} = 2x + 4$ cm dan $EC = 3x - 5$ cm. Andaikan $\angle B = 90^o$ berapakah panjang $\overline{BC}$?

Masalah 4.2.3

Misalkan dua segitiga *ABC* dan *DEF* seperti yang terlihat pada gambar, $DE \parallel AB$ dan $DF \parallel AC$, buktikan bahwa $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. (Buatkan alur pembuktiannya dan tuliskan bukti formalnya).

Presentasikan/bandingkan kesimpulan yang kalian buat sendiri atau secara berkelompok dari hasil aktivitas Kegiatan 4.2.2 di depan kelas untuk diperoleh kesimpulan yang lengkap dan benar. Tuliskan hasil presentasi dan diskusi kelasnya.

Kegiatan 4.2.3: Menentukan Kesebangunan Bangun Datar dengan Bangun Datar Hasil Transformasi (Rotasi, Pergeseran, Dilatasi/Perbesaran, dan Pencerminan).

Perhatikan informasi berikut:

Bangun datar A'B'C' hasil transformasi dilatasi dengan skala 3/2 dari bangun datar ABC, maka mereka ***sebangun***

Bangun datar A'B'C'D' didapat dengan cara merotasi bangun datar ABCD sebesar, 120° maka ABCD dan A'B'C'D' ***sebangun***

Bangun datar ABCD dicerminkan dan diperoleh bayangannya A'B'C'D', maka mereka ***sebangun***

Bangun ABCD digeser ke arah kanan dan didapat bangun datar A'B'C'D', maka mereka ***sebangun***

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

Ayo Menanya

Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari hasil pengamatan, buatlah pertanyaan terkait hasil pengamatan Anda dan jawaban atas pertanyaan yang diajukan teman atau kelompok lain terkait kesebangunan antara dua segitiga.

Untuk bisa mengecek kebenaran konjektur yang Anda buat atau menjawab pertanyaan yang diajukan teman/kelompok lain, lakukan aktivitas penyelidikan berikut.

Penyelidikan 4.2.3.1: Menentukan Kesebangunan Dua Segibanyak Hasil Rotasi.
Gambar sebarang segiempat ABCD. Tentukan bayangan hasil rotasinya jika diputar sebesar 60°, lakukan penyelidikan terkait hubungan kesebangunannya dengan mengikuti langkah-langkah berikut.
Langkah 1 : gambarlah segiempat ABCD,
Langkah 2 : rotasi segiempat tersebut dengan sudut putar 60° dan pusat rotasi di luar segiempat *ABCD*, dengan mengikuti tahapan-tahapan berikut.

1) Tentukan sebuat titik *O* diluar segiempat.
2) Buat garis putus-putus yang menghubungkan titik-titik sudut ke titik pusat putar *O*, sehingga terbentuk garis *AO*, *BO*, *CO*, dan *DO.*
3) Putar garis *AO*, *BO*, *CO*, dan *DO* sebesar 60° berlawanan dengan arah jarum jam.
4) Tandailah titik ujung garis hasil merotasi garis *AO*, *BO*, *CO,* dan *DO* dengan huruf A', B', C' dan D' secara berurutan.
5) Hubungkan titik-titik A', B', C', dan D’ sehingga membentuk segiempat A'B'C'D'.

Langkah 3 : ukurlah semua sisi dan sudut pada segiempat A'B'C'D'.
Langkah 4 : bandingkan rasio sisi-sisi yang bersesuaian dan ukuran sudut-sudut yang bersesuaian dari segiempat ABCD dan A'B'C'D'.

Tuliskan kesimpulan terkait hubungan kesebangunan antara segibanyak dan segibanyak hasil rotasi yang didapat dari kegiatan Penyelidikan 4.2.3.1.

Penyelidikan 4.2.3.2: Menentukan Kesebangunan Dua Bangun Datar Hasil Pencerminan/Refleksi.

Gambar sebarang segiempat ABCD, selanjutnya tentukan bayangan hasil pencerminan, lakukan penyelidikan terkait hubungan kesebangunannya dengan mengikuti langkah-langkah berikut.

Langkah 1: gambarlah sebarang segiempat ABCD,

Langkah 2: gambarlah garis *l* di luar segiempat sebagai cermin,

Langkah 3: gambarlah bayangan segiempat hasil pencerminan, dengan mengikuti tahapan-tahapan berikut.

1) Buat garis melalui titik-titik sudut A, B, C dan D yang memotong tegaklurus garis *l* di O, P, Q dan R secara berurutan, sehingga terbentuk garis AO, BP, CQ dan DR.
2) Perpanjang garis AO ke titik A' sehingga panjang AO sama dengan panjang OA'.
3) Lakukan proses yang sama seperti langkah (2) untuk mendapatkan titik-titik B', C' dan D'.
4) Hubungkan titik-titik A', B', C', dan D' sehingga membentuk segiempat A'B'C'D'.

Langkah 3: ukurlah semua sisi dan sudut pada segiempat A'B'C'D'.

Langkah 4: bandingkan rasio sisi-sisi yang bersesuaian dan ukuran sudut-sudut yang bersesuaian dari segiempat ABCD dan A'B'C'D'.

Tuliskan kesimpulan terkait hubungan kesebangunan antara segibanyak dan segibanyak hasil pencerminan.

Penyelidikan 4.2.3.3: Menentukan kesebangunan dua bangun datar hasil pergeseran.

Gambar sebarang segiempat ABCD, selanjutnya tentukan bayangan hasil pergeseran dengan aturan pergeseran yang ditetapkan, lakukan penyelidikan terkait hubungan kesebangunannya dengan mengikuti langkah-langkah berikut.

Langkah 1: gambarlah sebarang segiempat ABCD pada bidang kartesius,

Langkah 2: gambarlah bayangan segiempat hasil pergeseran dengan aturan pergeserannya: $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$, dengan mengikuti tahapan-tahapan berikut.

1) Tentukan koordinat bayangan A', B', C', dan D' dari titik-titik sudutnya mengikuti aturan pergeserannya.
2) Hubungkan titik-titik A', B', C', dan D' sehingga membentuk segiempat A'B'C'D'.

Langkah 3: ukurlah semua sisi dan sudut pada segiempat A'B'C'D'.

Langkah 4: bandingkan rasio sisi-sisi yang bersesuaian dan ukuran sudut-sudut yang bersesuaian dari segiempat ABCD dan A'B'C'D'.

Tuliskan kesimpulan terkait hubungan kesebangunan antara segibanyak dan segibanyak hasil pergeseran.

Penyelidikan 4.2.3.4: Menentukan kesebangunan dua bangun datar hasil dilatasi.

Gambar sebarang segiempat ABCD, selanjutnya tentukan bayangan hasil dilatasi dengan aturan pergeseran yang ditetapkan, lakukan penyelidikan terkait hubungan kesebangunannya dengan mengikuti langkah-langkah berikut:

Langkah1: gambarlah sebarang segiempat ABCD pada bidang kartesius,

Langkah2: gambarlah bayangan segiempat hasil dilatasi dengan skala $\frac{3}{2}$ dengan aturan pergeserannya: $(x,y) \rightarrow (\frac{3}{2}x, \frac{3}{2}y)$, dengan mengikuti tahapan-tahapan berikut:

1) Tentukan koordinat bayangan A', B', C' dan D' dari titik-titik sudutnya mengikuti aturan pergeserannya.
2) Hubungkan titik-titik A', B', C', dan D' sehingga membentuk segiempat A'B'C'D'.

Langkah 3: ukurlah semua sisi dan sudut pada segiempat A'B'C'D'.

Langkah 4: bandingkan rasio sisi-sisi yang bersesuaian dan ukuran sudut-sudut yang bersesuaian dari segiempat ABCD dan A'B'C'D'.

Tuliskan kesimpulan terkait hubungan kesebangunan antara segibanyak dan segibanyak hasil dilatasi.

Masalah 4.2.4

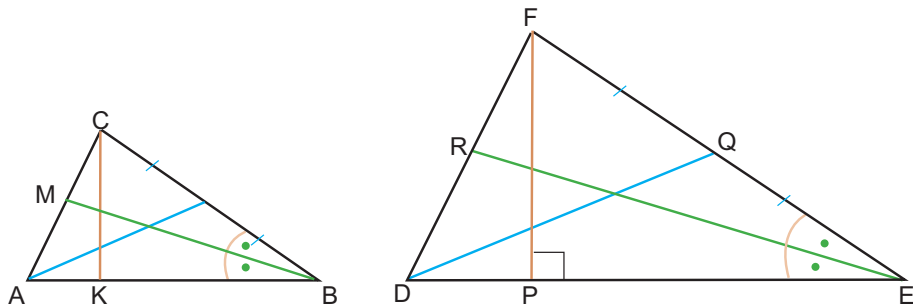
Misalkan luas suatu persegi ABCD adalah 9 cm^2. Berapa panjang sisi-sisi dan luas segibanyak yang diperoleh dengan melakukan transformasi pada persegi ABCD.

1. Dilatasi dengan skala 2.
2. Rotasi dengan pusat putar dititik A sebesar 30 derajat searah jarum jam.

Presentasikan/bandingkan kesimpulan yang Anda buat sendiri atau secara berkelompok dari hasil aktivitas Kegiatan 4.2.3 di depan kelas untuk diperoleh kesimpulan yang lengkap dan benar.

Tuliskan hasil presentasi dan diskusi kelasnya.

Kegiatan 4.2.4: Menentukan Ukuran Unsur-Unsur Segitiga yang Bersesuaian dari Dua Segitiga yang Sebangun

Perhatikan dua segitiga ABC dan DEF yang sebangun, ***ABC ~ DEF.***

Garis CK dan garis FP adalah salah satu ***garis tinggi*** segitiga ABC dan DEF, Garis AL dan DQ adalah salah satu ***garis berat*** segitiga ABC dan DEF, dan Garis BM dan ER adalah salah satu ***garis bagi*** sudut segitiga ABC dan DEF. Berdasarkan konsep kesebangunan dua segitiga, maka dapat ditulis beberapa kesimpulan:

$$\angle A \cong \angle D; \angle B \cong \angle E; \angle C \cong \angle F$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{DF}$$

Karena, $ABC \sim DEF$, maka dapat disimpulkan pula bahwa:
Sisi AB dan DE adalah pasangan sisi yang bersesuaian dan garis CK adalah garis tinggi terhadapat sisi AB pada segitiga ABC dan garis FP adalah garis tinggi terhadap sisi DE pada segitiga DEF, maka kita katakan garis CK dan garis FP adalah garis-garis yang bersesuaian/berkorespondensi.
Garis BM dan garis ER adalah garis-garis yang bersesuaian/berkorespondensi.
Garis BM dan garis ER adalah garis-garis yang bersesuaian/berkorespondensi. Mengapa?
Garis AL dan garis DQ adalah garis-garis yang bersesuaian/berkorespondensi. Mengapa?
Berdasarkan informasi yang Anda peroleh dari mengamati, tulis hal-hal penting atau istilah-istilah matematika yang ada dalam informasi tersebut.

Ayo Menanya

Berdasarkan informasi di atas, tuliskan dugaan sementara/konjektur terkait hubungan antara:
1) garis tinggi yang bersesuaian pada dua segitiga yang sebangun.
2) garis bagi yang bersesuaian pada dua segitiga yang sebangun.
3) garis bagi sudut yang bersesuaian pada dua segitiga yang sebangun.

Untuk mengecek apakah kesimpulan yang Anda buat merupakan pernyataan yang benar, lakukan penyelidikan berikut.

Penyelidikan 4.2.4.1: Bagian-bagian segitiga yang bersesuaian.

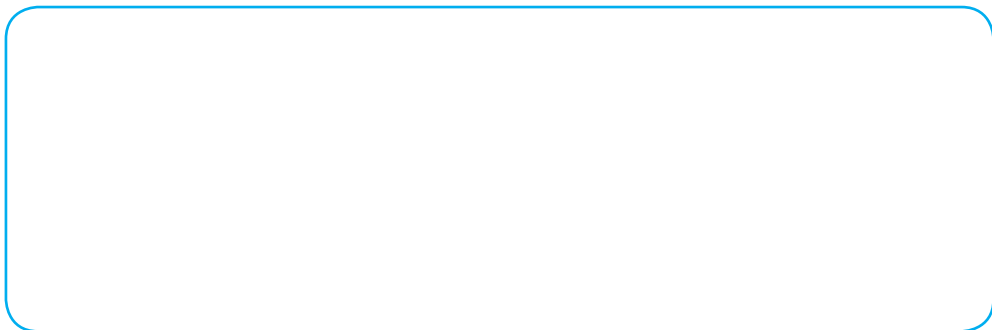
Siapkan kertas tak bergaris, penggaris, busur, dan jangka untuk melakukan investigasi ini, kemudian ikuti langkah-langkah berikut.

Langkah 1 : Gambar sebarang segitiga. Gunakan ukuran faktor (perbesaran) pilihan Anda, bentuklah sebuah segitiga yang sebangun (berbeda ukuran)

Langkah 2 : Buat sepasang garis tinggi yang bersesuaian dan gunakan jangka Anda untuk membandingkan ukuran-ukurannya. Bagaimana hasil perbandingannya dikaitkan dengan ukuran faktor (perbesaran) yang Anda gunakan untuk membuat segitiga kedua?

Langkah 3 : Tentukan pasangan garis tinggi yang bersesuaian. Bandingkan ukuran panjangnya.

Langkah 4 : Buat sepasang garis bagi sudut yang bersesuaian. Bandingkan ukuran panjang garis bagi-garis bagi yang bersesuaian.

Langkah 5 : Bandingkan hasil yang Anda peroleh dengan teman sebelah Anda.

Dari hasil penyelidikan yang Anda lakukan, buatlah kesimpulan terkait hubungan panjang garis tinggi, garis berat, dan garis bagi sudut yang bersesuaian pada dua segitiga yang sebangun:

Untuk memperkaya wawasan dan pengetahuan Anda, berikut akan disajikan sebuah contoh pembuktian secara deduktif untuk membuktikan **kesimpulan** yang Anda buat pada kegiatan ayo menalar.

Contoh Soal 4.2.5

Buktikan bahwa panjang garis berat-garis berat yang bersesuaian dari dua segitiga yang sebangun adalah proporsional (memiliki rasio yang sama/senilai) dengan panjang sisi-sisi yang bersesuaian.

Pembuktian:

Diketahui:

Segitiga ΔLVE dan ΔMTH sebangun,

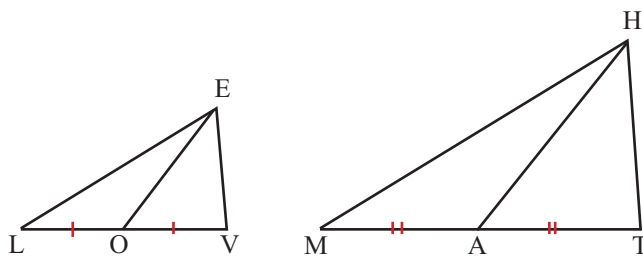
Titik O dan A secara berurutan adalah titik tengah sisi LV dan sisi MT

Garis EO dan garis HA secara berurutan adalah garis berat pada segitiga ΔLVE dan segitiga ΔMTH.

Akan dibuktikan: $\frac{EO}{HA} = \frac{EL}{HM}$

Bukti:

Untuk membuktikan pernyataan tersebut, akan lebih mudah lakukan analisis berikut.

Diberikan bahwa segitiga *LVE* dan *MTH* sebangun dengan garis bagi sisi yang bersesuaian adalah garis *EO* dan *HA*. Perhatikan gambar berikut.

Anda harus membuktikan bahwa rasio dari garis bagi sisi-garis bagi sisi yang bersesuaian dan rasio sisi-sisi yang berseusuain sama/senilai. Artinya kamu tunjukkan bahwa $\frac{EO}{HA} = \frac{EL}{HM}$. Gunakan startegi berpikir mundur, kamu akan bisa melihat bahwa definisi dua segitiga sebangun akan membantu menunjukkan bahwa panjang sisi-sisi yang bersesuaian proporsional. Dengan menggunakan konjektur kesebangunan SAS, Anda bisa menunjukkan bahwa $\frac{EO}{HA} = \frac{EL}{HM}$, dengan terlebih dahulu menunjukkan bahwa segitiga ELO dan segitiga HMA sebangun.

No.	Pernyataan	Alasan
1.	$\Delta LVE \sim \Delta MTH$	Diketahui
2.	$\frac{EL}{HM} = \frac{LV}{MT}$	Definisi Kesebangunan
3.	$\frac{EL}{HM} = \frac{LO + OV}{MT + AT}$	Definisi Penjumlahan ruas garis
4.	*EO* dan *HA* adalah garis berat	Diketahui

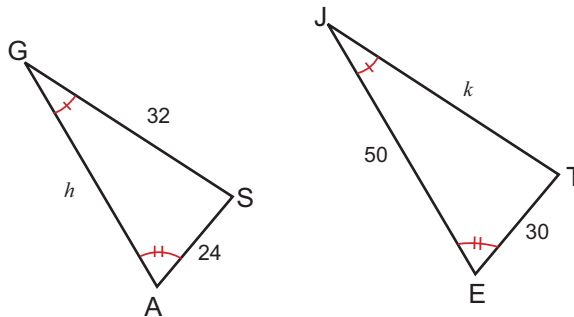
No.	Pernyataan	Alasan
5.	O adalah titik tengah LV A adalah titik tengah MT	Definisi garis berat
6.	$LO = OV$ dan $MA = AT$	Definisi garis berat
7.	$\frac{EL}{HM} = \frac{LO + LO}{MA + MA} = \frac{2LO}{2\text{MA}} = \frac{LO}{MA}$	Subsitusi dan Aljabar
8.	$\angle L \cong \angle M$	Definisi Kesebangunan
9.	$\Delta ELO \sim \Delta HMA$	Shorcut Kesebangunan (Sisi-Sudut-Sisi)
10.	$\frac{EO}{HA} = \frac{EL}{HM}$	Definisi Kesebangunan

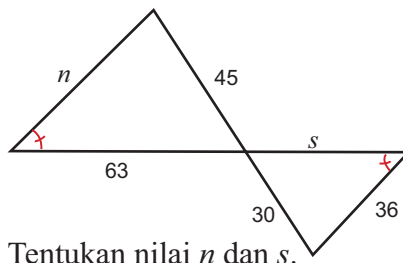
Masalah 4.2.5

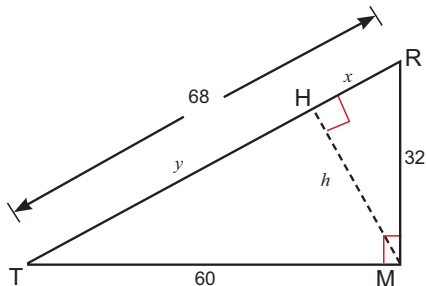
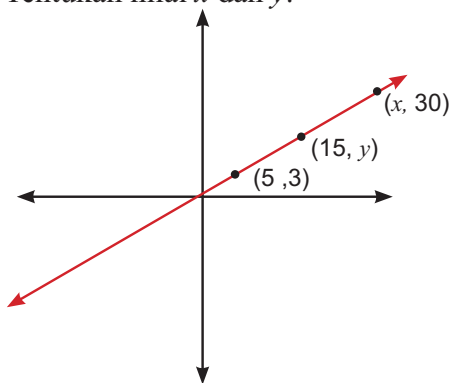
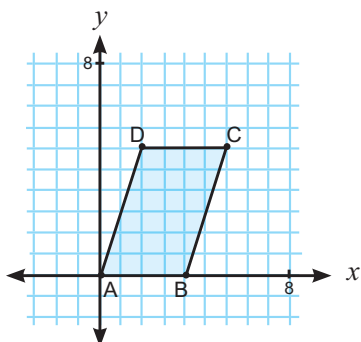
Jika rasio dari ukuran panjang sisi-sisi yang bersesuaian pada dua segitiga adalah 2:3, berapa rasio dari ukuran luas dua segitiga tersebut.

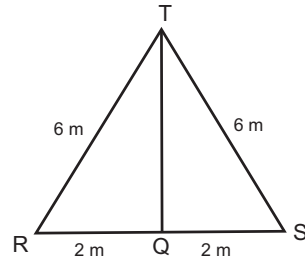
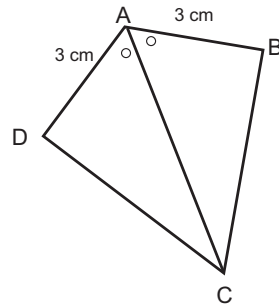
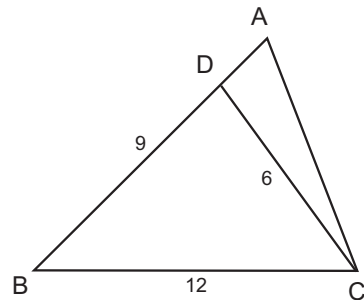
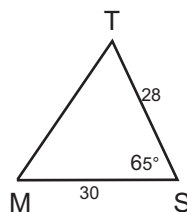
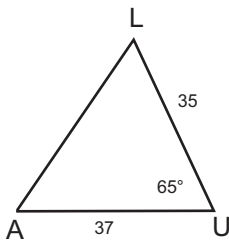
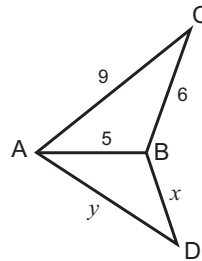
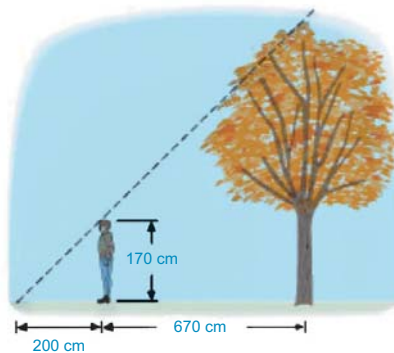
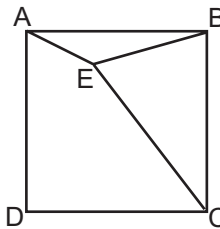
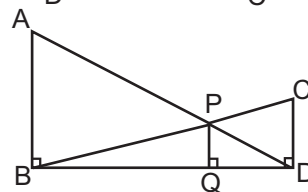
Presentasikan/bandingkan kesimpulan yang Anda buat sendiri atau secara berkelompok dari hasil aktivitas Kegiatan 4.2.4 di depan kelas untuk diperoleh kesimpulan yang lengkap dan benar. Tuliskan hasil presentasi dan diskusi kelasnya.

Soal Latihan

1. Perhatikan dua segitiga ASG dan ETJ berikut.

   a. Apakah segitiga ΔASG dan ΔETJ sebangun? Berikan alasannya.
   b. Tentukan nilai h dan k.

2. Perhatikan gambar berikut.

   Tentukan nilai n dan s.

3. Mengapa $\Delta TMR \sim \Delta THM \sim \Delta MHR$? Tentukan nilai x, y, dan h.

4. Tentukan nilai x dan y.

5. Gunakan aturan pasangan urutan, $(x, y) \rightarrow (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$, untuk merelokasi koordinat titik-titik sudut jajargenjang ABCD. Sebut jajargenjang baru A'B'C'D'. Apakah A'B'C'D' sebangun dengan ABCD? Jika sebangun, berapa rasio keliling ABCD terhadap keliling A'B'C'D'? berapa rasio luasnya?

Uji Kompetensi

1. Perhatikan ΔRQT dan ΔSQT pada gambar di samping. Selidiki apakah ΔRQT kongruen dengan ΔSQT? Apakah akibatnya?

2. Perhatikan gambar di samping. Selidiki apakah ΔDAC kongruen dengan ΔBAC. Apakah akibatnya?

3. Perhatikan segitiga ABC seperti yang ditunjukkan gambar di samping. Diketahui panjang $BC = 12$ cm, $DB = 9$ cm, $CD = 6$ cm dan $\angle BCD = \angle BAC$. Tentukan rasio dari keliling segitiga. Tentukan rasio dari keliling segitiga ADC terhadap segitiga BDC?

4. Perhatikan dua segitiga AUL dan MST berikut.
   Apakah segitiga AUL dan MST sebangun? Berikan alasannya.

5. Jika $\Delta ABC \sim \Delta DBA$, tentukan nilai x dan y, dalam cm.

6. Latif yang memiliki tinggi badan 170 cm ingin mengetahui tinggi bagian atas pohon. Dia berjalan sepanjang bayangan pohon hingga kepalanya berada pada posisi dimana bayangannya bertumpukan tepat pada bagian ujung bayangan pohonnya. Dan ternyata dia berada sejauh 670 cm dari pohon dan sejauh 200 cm dari ujung bayangannya. Berapa tinggi pohon tersebut?

7. Rasio dari keliling dari dua jajargenjang yang sebangun adalah 3:7. Berapa rasio luas mereka?
8. Diketahui suatu persegi $ABCD$ dengan perbandingan panjang $EA : EB : EC = 1 : 2 : 3$, tentukan ukuran sudut AEB, dalam derajat.

9. Pada bangun datar di samping, diketahui $\angle ABD = \angle CDB = \angle PQD = 90°$. Jika $AB : CD = 3 : 1$, rasio dari $CD : PQ$ adalah . . . .

10. Tiga persegi dengan panjang sisi 3, 5, dan 8 diletakkan seperti bersinggungan. Titik sudut dari persegi terkecil dihubungkan dengan titik sudut pada persegi terbesar, seperti yang terlihat ada gambar. Tentukan luas daerah yang diarsir?

Glosarium

Aturan penjumlahan	: Aturan penghitungan peluang untuk kejadian yang saling lepas.
Aturan perkalian	: Aturan penghitungan peluang untuk kejadian yang tidak saling lepas
Aturan Sturgess	: Aturan yang menjelaskan cara membagi data berukuran besar ke dalam kelas-kelas tertentu.
Bangun datar kongruen	: Dua bangun datar kongruen jika keduanya identik/sama dalam bentuk dan ukuran.
Data	: Ukuran dari suatu nilai.
Datum	: Satu ukuran dari suatu nilai.
Data berkelompok	: Data yang sudah dikelompokkan dalam kelas-kelas.
Data tunggal	: Data mentah yang belum diolah atau dikelompokkan.
Desil	: Nilai yang membagi data menjadi 10 kelompok sama banyak.
Deviasi standar	: Akar dari jumlah kuadrat deviasi dibagi banyaknya data.
Diagram batang	: Diagram berbentuk batang-batang tegak atau mendatar dan sama lebar dengan batang-batang terpisah untuk menggambarkan nilai suatu objek penelitian.
Diagram batang daun	: Daun diagram yang terdiri dari batang dan daun. Batang memuat angka puluhan dan daun memuat angka satuan.
Diagram garis	: Diagram berbentuk garis yang digunakan untuk menyajikan data statistik yang diperoleh berdasarkan pengamatan dari waktu ke waktu secara berurutan.
Dilatasi/perskalaan/perbesaran	: Suatu dilatasi dari bangun datar dari titik O dengan faktor skala $c(c\neq 0)$ adalah suatu transformasi dari bangun datar dengan titik asal O dipetakan ke dirinya sendiri dan suatu titik P dipetakan ke titik P', dimana O,P dan P' segaris dan $OP' = cOP$. Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat kartesius dinyatakan sebagai $x' = cx, y' = cy$.

Distribusi frekuensi	: Pengolahan data mentah dalam bentuk tabel menggunakan kelas dan frekuensi.
Frekuensi	: Jumlah data dalam suatu kelas tertentu.
Frekuensi harapan	: Banyaknya kejadian dikalikan dengan peluang kejadian itu.
Garis bagi sudut segitiga (*bisector angle*)	: Ruas garis bagi sudut segitiga adalah garis yang membagi sudut segitiga menjadi dua sudut yang kongruen (berukuran sama besar).
Garis berat (Median)	: Ruas garis yang melalui titik sudut segitiga dan memotong sisi di depannya di titik tengahnya (*midpoint*).
Garis tinggi sisi segitiga (*Altitude*)	: Ruas garis tinggi sisi segitiga adalah garis yang melalui titik sudut segitiga dan memotong tegak lurus sisi di depannya.
Histogram	: Grafik yang menampilkan data menggunakan batang tegak berdampingan yang tingginya merepresentasikan frekuensi dari kelas yang bersangkutan.
Jangkauan	: Selisih nilai terbesar dan nilai terkecil.
Jarak antar titik	: Panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan titik-titik tersebut.
Jarak titik ke garis	: Misal P adalah titik dan g adalah garis. Jarak titik P ke garis g adalah panjang ruas garis penghubung antara titik P dengan proyeksi titik P pada garis g.
Jarak titik ke bidang	: Misal P adalah titik dan K adalah bidang. Jarak antara P dengan bidang-K adalah panjang ruas garis penghubung P dengan proyeksi P pada bidang-K.
Kejadian	: Himpunan bagian dari ruang sampel
Kejadian majemuk	: Dua atau lebih kejadian yang terjadi secara bersamaan
Kelas	: Kelompok data berdasarkan kategori kuantitatif atau kualitatif.
Kombinasi	: Susunan yang mungkin dari unsur-unsur yang berbeda dengan tidak memperhatikan urutannya.
Kongruen (geometri) sama dalam ukuran	: Dua ruas garis kongruen berarti dua ruas garis tersebut memiliki ukuran panjang yang sama.

Korespondensi satu-satu	:	Suatu pemetaan satu-satu diantara dua himpunan. Masing-masing anggota dari himpunan pertama dibuat pengaitan dengan tepat satu unsur pada himpunan kedua dan sebaliknya.
Kuartil	:	Membagi data yang telah diurutkan menjadi empat bagian yang sama banyak.
Mean	:	Rata-rata hitung.
Median	:	Nilai tengah setelah data diurutkan.
Modus	:	Nilai yang paling sering muncul.
Ogive	:	Grafik yang menampilkan frekuensi kumulatif kelas-kelas dalam suatu distribusi frekuensi.
Panjang kelas	:	Selisih batas bawah (atas) suatu kelas dengan batas bawah (atas) kelas sebelumnya.
Parameter	:	Ukuran atau karakteristik yang didapatkan menggunakan data keseluruhan dalam suatu populasi.
Peluang	:	Kemungkinan munculnya suatu kejadian.
Peluang saling bebas	:	Peluang dua atau lebih kejadian yang tidak saling mempengaruhi.
Peluang saling bersyarat	:	Peluang dua kejadian yang saling bergantung apabila terjadi atau tidak terjadinya kejadian A akan mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian B.
Peluang saling lepas	:	Peluang dua atau lebih kejadian yang tidak mungkin terjadi bersama-sama.
Permutasi	:	Susunan yang mungkin dari unsur-unsur yang berbeda dengan memperhatikan urutannya.
Persentil	:	Membagi data yang telah diurutkan menjadi 100 bagian yang sama.
Poligon	:	Frekuensi Grafik yang menampilkan data menggunakan garis yang menghubungkan titik-titik yang tingginya manandakan frekuensi dan digambarkan tepat di titik tengah kelas yang berkaitan.
Populasi	:	Keseluruhan objek penelitian.
Ragam	:	Rata-rata dari kuadrat jarak setiap nilai data dengan rata-ratanya.
Rata-rata (rata-rata hitung)	:	Jumlah nilai data dibagi dengan banyaknya data.
Rasio	:	Hasil bagi (*quotient*) dari dua bilangan atau kuantitas. Rasio dari x ke y ditulis $x{:}y$.

Refleksi/pencerminan : Misal l adalah garis pada bidang. Maka bayangan dari titik *P* adalah titik *P'* sedemikian hingga *PP'* adalah garis yang tegak lurus terhadap garis l dan l memotong garis *PP'* di titik tengah garis (*midpoint*).

Rotasi : Rotasi bangun datar dengan pusat titik asal *O* sebesar sudut α adalah suatu transformasi dari bangun datar dengan titik *O* di petakan ke dirinya sendiri, dan suatu titik *P* dengan koordinat sudut/polar (r, θ) dipetakan ke titik *P'* dengan koordinat sudut/polar (r, θ + α).

Sampel : Sebagian dari objek penelitian yang dianggap mewakili keadaan populasi objek penelitian.

Sebangun : Dua segibanyak adalah sebangun jika ada korespondensi antara titik-titik sudutnya sehingga sudut-sudut yang bersesuaian kongruen dan rasio dari sisi-sisi yang bersesuaian sama besar.

Segibanyak : Bangun datar yang dibatasi oleh garis lurus (ruas garis). Ruas garis yang membatasi bangun datar tersebut disebut sisi segibanyak.

Segibanyak kongruen : Dua segibanyak kongruen jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik sudutnya sedemikian hingga semua sisi-sisi yang bersesuaian kongruen dan semua sudut-sudut yang bersesuaian kongruen.

Segiempat : Segibanyak yang memiliki 4 sisi.

Segitiga : Segibanyak yang memiliki 3 sisi.

Simpangan rata-rata (deviasi rata-rata) : Nilai rata-rata dari selisih setiap data dengan nilai rataan hitung.

Simpangan rata-rata : Penyimpangan nilai-nilai data terhadap rata-ratanya.

Simpangan baku : Akar kuadrat dari ragam.

Sisi ruas garis	: Salah satu ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut yang berdekatan pada segi banyak.
Statistika	: (1) Cabang dari matematika terapan yang mempunyai cara-cara mengumpulkan dan menyusun data, mengolah dan menganalisis data serta menyajikan data dalam bentuk kurva atau diagram, menarik kesimpulan, menafsirkan parameter dan menguji hipotesa yang didasarkan pada hasil pengolahan data. (2) Ukuran atau karakteristik yang didapatkan menggunakan data dari sampel.
Sudut (di antara dua garis/sinar)	: Gabungan dari dua sinar yang mempunyai persekutuan titik tetap.
Titik tengah ruas garis (*midpoint*)	: Titik tengah ruas garis adalah titik yang membagi ruas garis menjadi dua ruas garis yang kongruen (panjangnya sama besar).
Titik Tengah (*midpoint*/statistika)	: Angka yang terletak di tengah suatu kelas.
Transformasi (pada bidang)	: Misal S adalah himpunan titik pada bidang. Suatu transformasi dari bangun datar adalah pemetaan satu-satu dari S ke S.
Translasi/pergeseran (pada bidang)	: Transformasi bangun datar dengan suatu titik P dengan koordinat (x, y) dipetakan ke titik P' dengan koordinat (x', y'), dengan $x' = x + h, y' = y + k$.
Titik sampel	: Setiap hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan.
Variansi	: Kuadrat dari simpangan baku.

Daftar Pustaka

Bluman, Allan. 2009. *Elementary Statistics: a step by step approach*. Seventh edition. New York: McGraw-Hill.

BPS. 2015. *Statistik 70 tahun Indonesia Merdeka*. ISBN: 978-979-064-858-6.

Djarwanto. 1992. *Soal-Jawab Statistik (Bagian Statistik Induktif). Edisi Kedua*. Yogyakarta: Penerbit Liberty.

Lewis, Harry. 1968. *Geometry, A Contemporary Course*. London: D, Van Nostrand Company, Inc.

Rosen, Kenneth H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications. Seventh edition*. New York: McGraw-Hill.

Serra, Michael. 2008. *Discovering Geometry: An Investigative Approach.* Emeryville: Key Curriculum Press.

Sun, Thomas Wong Hok. 2008. *Challenging Mathematics For 'O' Level*. Singapore: Redspot Publications PTE LTD.

Townsend, Michael. 1987. *Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and graph Theory.* California: The Benjamin/Cummings.

Walpole, R.E dan Myers, R.H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan. Edisi Keempat*. Penerjemah: Dr. RK. Sembiring. Bandung: Penerbit ITB.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fisher.html

http://tekno.tempo.co/read/news/2015/12/11/072727007/google-rata-rata-orang-indonesia-instal-31-aplikasi

Profil Penulis

Nama Lengkap : Dr. Abdur Rahman As'ari, M.Pd, M.A.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : abdur.rahman.fmipa@um.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang
2. Wakil Presiden Indonesian Mathematics Societi (IndoMS)
3. Asisten Direktur I Lembaga Pendidikan Islam Sabilillah
4. Korprodi S2 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Pascasarjana S3 Teknologi Pembelajaran Universitas Negeri Malang (2007-2012)
2. S2: Pasca Sarjana S2 College of Education, The Ohio State University, USA (1994-1995)
3. S2: Pascasarjan S2 Pendidikan Matematika IKIP Malang (1984-1990)
4. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang (1979-1983)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Matematika SMP Kelas 7 (tahun 2014)
2. Buku Matematika SMP Kelas 8 (tahun 2014)
3. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. The Use of Graphic Organizer to Enhance Students' Ability Better Prepare Learner-Centered Mathematics Teaching and Learning: A Classroom Action Research (2012)
2. Critical Thinking Disposition of Prospective Mathematics Teachers in Indonesia (2014)

Nama Lengkap : Dahliatul Hasanah, S.Si, M. Math. Sc.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : dahliatul.hasanah.fmipa@um.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Master of Mathematical Sciences, ANU College of Physical and Mathematics Sciences, The Australian National University (2011-2012)
2. S1: Matematika, FMIPA Universitas Brawijaya (2003-2007)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Perancangan Multimedia Interaktif Matematika Bilingual Untuk Siswa SMP Rintisan Sekolah Bertaraf Internasional (2009)
2. Penerapan Model PMKM Untuk Meningkatkan Kemampuan Metakognitif Mahasiswa Fisika pada Mata Kuliah Matematika I Fisika (2010)
3. Pembelajaran Berdasar Masalah Untuk Meningkatkan Ketrampilan Berpikir dan Ketrampilan Pemecahan Masalah Mahasiswa Biologi Pada Mata Kuliah Matematika Biologi (2011)
4. Identifikasi Kesalahan Konsep Matematika Mahasiswa Baru Angkatan 2013 Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UM (2012)

Nama Lengkap : Prof. Dr. Ipung Yuwono, M.S., M.Sc.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : ipungmat@um.ac.id atau ipungum@yahoo.co.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang
2. Asesor BAN-PT
3. Anggota Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP)
4. Ketua Tim Juri Kontes Literasi Matematika PISA (Program for International Students Assessment)
5. Ketua Penyusun soal Matematika pada SNM PTN/SBM PTN
6. Anggota Tim Monitoring dan Evaluasi Implementasi Kurikulum 2013 SMA
7. Dosen Program Pascasarjana Prodi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3:Program Pascasarjana Prodi Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya (1999-2006))
2. S2: Mathematics Education, University of Twente, Belanda (1998-1999)
3. S2: Pascasarjana Matematika ITB Bandung (1987-1990)
4. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang (1977-1981)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pendidikan Matematika II (2007)
2. Model-model Pembelajaran Inovatif (2008)
3. Workshop Penelitian Pendidikan Matematika (2011)
4. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Model Pembelajaran Matematika yang Sejalan dengan Kurikulum Berbasis Kompetensi (2008)
2. Pengembangan model pembelajaran matematika SMP berbasis Standar Proses Pendidikan (2009)
3. Pengembangan bahan ajar (teaching material) matematika SMP berbasis Standar Proses Pendidikan (2010)
4. Pengembangan model pembelajaran matematika SMP mengacu Kurikulum 2013 (2013)

Nama Lengkap : Latifah Mustofa Lestyanto, S.Si, M.Pd.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : latifah.mustofa.fmipa@um.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jln. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

2. S2: Pasca Sarjana Pendidikan Matematika - Universitas Sebelas Maret, Surakarta (2009-2010)
3. S1: Jurusan Matematika Universitas Sebelas Maret (2003-2007)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pemetaan Payung Penelitian Pendidikan Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang (2013)
2. Penerapan Lesson Study Untuk Meningkatkan Keterampilan Guru Matematika SMP Dalam Penyusunan Perangkat Pembelajaran Berdasarkan Kurikulum 2013 (2015)

Nama Lengkap : Lathiful Anwar, S.Si, M.Sc.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : lathiful.anwar.fmipa@um.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jln. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: International Master Program on Mathematics Education (IMPoME) di Universitas Negeri Surabaya dan Utrecht University, Belanda (2009-2011)
2. S1: Matematika, FMIPA Universitas Negeri Malang (1999-2003)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Proses Berpikir Siswa Kelas 2 Sekolah Dasar dalam Membangun Strategi Mental Aritmatika untuk Menjumlahkan Bilangan sampai 500 Menggunakan Model Garis Bilangan (2011)
2. Identifikasi Nilai-nilai Karakter Bangsa yang dapat diintegrasikan melalui pembelajaran Matematik di SMP (2012)
3. Pengembangan Model Pembelajaran matematika Kontekstual (2013)
4. Identifikasi Kesalahan Konsep Mahasiswa Baru tahun 2013 Prodi Pendidikan Matematika (2013)
5. Analisis Prestasi Belajar Mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang (2014)
6. Pengembangan Media Pembelajaran Untuk Mendukung Kemampuan Penalaran Spasial Siswa (2015)

Nama Lengkap : Dr. Makbul Muksar, S.Pd, M.Si.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : makbul.muksar.fmipa@um.ac.id
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang
2. Supervisor Sekolah Model Terpadu Bojonegoro
3. Manajer Sekolah Model Terpadu Bojonegoro
4. Ketua Jurusan Matematika FMIPA UM
5. Kepala Pusat Pengembangan Pendidikan Profesi Guru LP3 UM

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Matematika, ITB Bandung (2000-2005)
2. S2: Matematika, ITB bandung (1994-1996)
3. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang (1986-1991)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Analisis Real (2011)
2. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Peningkatan Kemampuan Bahasa Inggris dan Hasil Belajar Matematika Dasar I Mahasiswa Bilingual Melalui Penerapan Metode Analisis Kesalahan Newman (2009)
2. Peningkatan Kemampuan Menyelesaikan Soal Cerita Matematika Siswa Kelas IV SDN Kebonsari I Malang Melalui Penerapan Metode Analisis Kesalahan Newman (2010)
3. Studi Penggunaan Metode Level Set Dalam Menyelesaikan Masalah Stefan (2013)
4. Identifikasi Kesalahan Konsep Matematika Mahasiswa Baru angkatan 2013 Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UM (2013)
5. Pengembangan Model Perangkat Pembelajaran Berbasis Kearifan Lokal Bermuatan Gender sebagai Upaya Strategis Pengarustamaan Gender bidang Pendidikan (2014)
6. Pemetaan Prestasi Mahasiswa Berdasarkan Jalur Masuk Jurusan Matematika FMIPA UM (2014)

Nama Lengkap : Nur Atikah, S.Si, M.Si.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : nur.atikah.fmipa@um.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Matematika

■ **Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:**

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**

1. S2: Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam – Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (2007-2010)
2. S1: Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam – Universitas Negeri Malang (2000-2005)

■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

1. Buku Matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

1. Pemetaan Payung Penelitian Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang (2013)
2. Analisis Multidimensional Scaling untuk Melihat Pemetaan Mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang (2015)

Nama Lengkap : Syaiful Hamzah Nasution, S.Si, S.Pd, M.Pd.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : syaiful.hamzah.fmipa@um.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jl. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika

- **Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:**
  1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

- **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**
  1. S2: Pendidikan Matematika di Program Pascasarjana Universitas Negeri Malang (2010-2012)
  2. S1: program gelar ganda S1 Matematika dan S1 Pendidikan Matematika di Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Malang (2003-2009)

- **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**
  1. Buku matematika SMA Kelas 12 (tahun 2014)

- **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**
  1. Pengembangan Model Pembelajaran Non Konvensional Berbasis TIK Untuk Matakuliah Matematika Dasar II (2013)
  2. Pengembangan WEB Jurusan Matematika (2013)
  3. Pengembangan Media Pembelajaran untuk Mendukung Kemampuan Penalaran Spasial Siswa (2015)

Nama Lengkap : Drs. Tjang Daniel Chandra, M.Si, Ph.D.
Telp. Kantor/HP : 0341-562180
E-mail : tjang.daniel.fmipa@um.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang, Gedung O7, Jln. Semarang 5 Malang 65145.
Bidang Keahlian: Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Matematika, Universitas Teknologi Eindhoven, Belanda (1998-2002)
2. S2: Matematika ITB (1992-1994)
3. S1: pendidikan matematika di IKIP Malang (1984-1990)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Geometri (2012)
2. Pemodelan Matematika (2014)
3. Buku matematika SMA Kelas 12 (2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Analisa kesalahan-kesalahan mahasiswa dalam mengerjakan soal-soal latihan dan tes Kalkulus Lanjut (2012)
2. Pemetaan Payung Penelitian Matematika di Jurusan Matematika FMIPA UM (2013)
3. Pengembangan Buku Elektronik Olimpiade Matematika Berbasis Web dengan Pendekatan Strategi Pemecahan Masalah (2014)

Profil Penelaah

Nama Lengkap : Dr. Agung Lukito, M.S.
Telp. Kantor/HP : +62318293484
E-mail : gung_lukito@yahoo.co.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Kampus Unesa Ketintang
Jalan Ketintang Surabaya 60231.
Bidang Keahlian: Matematika dan Pendidikan Matematika.

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. 2010 – 2016: Dosen pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Faculty of Mathematics and Informatics/Delft University of Technology (1996 – 2000)
2. S2: Fakultas Pascasarjana/Matematika/ITB Bandung (1988 – 1991)
3. S1: Fakultas PMIPA/Pendidikan Matematika/Pendidikan Matematika/ IKIP Surabaya (1981 – 1987)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks Matematika kelas 7 dan 10 (2013)
2. Buku Teks Matematika kelas 7,8 dan 10, 11 (2014)
3. Buku Teks Matematika kelas 7,8, 9 dan 10, 11, 12 (2015)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Perangkat Pendampingan Guru Matematika SD dalam Implementasi Kurikulum 2013 (2014)
2. Peluang Kerjasama Unit Pendidikan Matematika Realistik Indonesia dengan Pemangku Kepentingan, LPPM Unesa (2013)
3. Pemanfaatan Internet untuk Pengembangan Profesi Guru-guru Matematika SMP RSBI/SBI Jawa Timur, 2010, (Stranas 2010)
4. Relevansi Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI) dengan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP), 2009, (Stranas 2009)

Nama Lengkap : Drs. Turmudi, M.Sc., Ph.D.
Telp. Kantor/HP : (0264)200395/081320140361
E-mail : turmudi@upi.edu.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jl. Veteran 8 Purwakarta/Jl. Dr. Setiabudi 229 Bandung,
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika.

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika di S1, S2, dan S3 Universitas Pendidikan Indonesia.
2. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika 2007-2015
3. Ketua Prodi S2 dan S3 Pendidikan Matematika SPs UPI, 2012-2015 (dalam konteks terintegrasi dengan S1 Pendidikan Matematika FPMIPA UPI)
4. Direktur Kampus Daerah UPI Purwakarta, 2015- Sekarang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Mathematics Education, Graduate School of Education, Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
2. S2: Educational and Training System Designs, Twente University Enschede, Th
3. S2: Mathematics Education (Graduate School of Education), Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
4. S1: Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1984-1986).

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Math Project untuk SMP/MTs Kelas VII, Yrama Widya, (2014).

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Pembelajaran Matematika Berbasis Fenomena Dikdaktis di Pendidikan Dasar.

Nama Lengkap : Dr. Yansen Marpaung
Telp. Kantor/HP : 0274-883037 / 085878129726
E-mail : yanmar@dosen.usd.ac.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Universitas Sanata Dharma, Prodi Pendidikan Matematika, Paingan, Maguwoharjo, Sleman, Yogyakarta.
Bidang Keahlian: Pendidikan Matematika, Psikologi Kognitif, Salah satu pemrakarsa PMRI, sampai sekarang aktif mengembangkan PMRI dan mencobakannya di sekolah

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. 2006-2016: Dosen Pendidikan Matematika di S1 Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma
2. 2015-2016 :Dosen Pendidikan Matematika di S2 Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma
3. 2006-2012: Dosen Honorer di S2 Pendidikan Matematika, UNS, Solo
4. 2006-2012: Dosen Honorer di S3 Pendidikan Matematika UNESA, Surabaya
5. 2006-2016:Melatih guru-guru dalam rangka PMRI (Penddikan Matematika Realistik Indonesia).

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3 :1982-1986;Pendidikan Matematika (Didkatik der Mathematik) di Universitaet Osnabrueck, Deutchland (Jerman). Lulus Maret 1986.
2. S2. Tidak melalui S2.
3. S1: Jurusan Pasti Alam FKIP, Universitas Sanata Dharma: 1968-1970

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku-buku Matematika SMP dan SMA dalam rangka KTSP terbitan Puskur.
2. Buku Matematika SMP, kurikulum 2013 awal yang disusun oleh kelompok di Medan

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

Tidak ada

Nama Lengkap : Prof. Dr. St. Suwarsono.
Telp. Kantor/HP : 0274-883037 / 085878129726
E-mail : stsuwarsono@gmail.com.
Akun Facebook : Stephanus Suwarsono
Alamat Kantor : Jalan Affandi, Mrican, Teromolpos 29, Yogyakarta 55002.
Bidang Keahlian: Matematika dan Pendidikan Matematika.

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Dosen tetap dengan jabatan akademik guru besar di Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (JPMIPA), Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Monash University (di Melbourne, Australia) Fakultas: Education Jurusan (Bidang): Mathematics Education: 1982.
2. S1: Jurusan Pasti Alam FKIP, Universitas Sanata Dharma: 1974.

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. -

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

Tidak ada

Nama Lengkap : Dr. Sugito Adi Warsito, M.Pd.
Telp. Kantor/HP : 085217181081
E-mail : sugito72@yahoo.com.
Akun Facebook : sugitoadi@facebook.com
Alamat Kantor : Jl. Raya Parung-Bogor No. 420 Lebakwangi Parung Bogor, Jawa Barat.
Bidang Keahlian: Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan.

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. Staf pada Bidang Program di PPPPTK Penjas dan BK Kemdikbud, Parung Bogor, Tahun 2002 – 2004.
2. Instruktur Pelatihan Guru Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan di PPPPTK Penjas dan BK Kemdikbud, Parung Bogor, Tahun 2004 – 2009.
3. Widyaiswara pada PPPPTK Penjas dan BK Kemdikbud, Parung Bogor Tahun 2010 – sekarang.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

4. S3: Program Studi Pendidikan Olahraga, Universitas Negeri Jakarta (2009 – 2013)
5. S2: Program Studi Pendidikan Olahraga, Universitas Negeri Jakarta (2006 – 2009)
6. S1: Jurusan Pendidikan Olahraga, Fakultas Pendidikan Olahraga, Universitas Negeri Jakarta (1992 – 1998)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks dan Buku Guru Mata Pelajaran Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan Sekolah Menengah Pertama Kelas IX, Tahun 2015.
2. Buku Teks dan Buku Guru Mata Pelajaran Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan Sekolah Menengah Atas Kelas XI, Tahun 2015.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Penguasaan Konsep Kepenjasan dan Profesionalisme Guru Pendidikan Jasmani, Olahraga, dan Kesehatan, Tahun 2013.

Nama Lengkap : Dr. Ali Mahmudi.
Telp. Kantor/HP : 081328728725
E-mail : ali_uny73@yahoo.com.
Akun Facebook : https://www.facebook.com/ali.mahmudi.90
Alamat Kantor : Kampus FMIPA UNY Kampus Karangmalang Yogyakarta.
Bidang Keahlian: Pedidikan Matematika.

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. 1999 - sekarang bekerja sebagai dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pendidikan Matematika/Sekolah Pascarjana Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) Bandung (2007 – 2010)
2. S2: Program Studi Pendidikan Matematika/Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya (UNESA) (1997 – 2003)
3. S1: Prodi Pendidikan Matematika/Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA/Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) (1992 – 2997)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku teks dan non-teks pelajaran matematika sekolah yang dikoordinasikan oleh Pusat Kurikulum dan Perbukuan (Puskurbuk) Kementrian dan Kebudayaan RI sejak 2005.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan interakctive student's book berbasis ICT untuk mendukung aktivitas eksplorasi konsep-konsep geometri.
2. Pengembangan bahan ajar matematika dengan pendekatan kontekstual untuk pembelajaran matematika di SMK.

Profil Editor

Nama Lengkap : Ir. Suah Sembiring
Telp. Kantor/HP : 08121020807
E-mail : quantumkalideres@yahoo.co.id.
Akun Facebook : -
Alamat Kantor : Jl. Peta Selatan 6Y, Kalideres, Jakarta Barat
Bidang Keahlian: Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi dalam 10 tahun terakhir:

1. 2002-sekarang: Direktur Bimbingan Belajar Quantum.
2. 1995-2002: Direktur Ganesha Operation Wilayah Jabotabek.
3. 1985-1995: Pengajar Matematika di Bimbingan Belajar KSM Jakarta.
4. 1985-1986: Dosen Metode Numerik dan Teknik Simulasi di STMIK BINUS Jakarta.
5. 1982-1985: Guru Matematika di SMP/SMA St. Aloysius Bandung.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Matematika Institut Teknologi Bandung (ITB) (1979-1984)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Matematika untuk SMA-MA/SMK-MAK Kelas X dan XII, Puskurbuk (2015).

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

Tidak ada.

PAJAK UNTUK
MEMBANGUN
JALAN DAN
JEMBATAN.

KATAKAN
TIDAK PADA
NARKOBA